Analytische Berechnung der Schallabstrahlung des ebenen Biegewellenwandlers

Diplomarbeit

durchgeführt von

Holger Hiebel

Institut für Breitbandkommunikation
Fachbereich Nachrichtentechnik und Wellenausbreitung

Interimistischer Leiter: O. Univ.-Prof. DI Dr. techn. Gernot Kubin

Technische Universität Graz

Begutachter / Betreuer: Ao. Univ.-Prof. DI Dr. techn. Gerhard Graber

Graz, im November 2005

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Herleitung der Gleichungen für die Ausbreitung von erzwungenen Biegewellen in dünnen Platten und den analytischen Methoden zur Berechnung der durch diese Biegewellen verursachten Schallabstrahlung von der Platte in die umgebende Luft. Insbesondere liegt der Schwerpunkt der Arbeit auf der Herleitung einer analytischen Beschreibung der Schallabstrahlung des „Manger-Schallwandlers“. Bei diesem Wandler ist die schallabstrahlende Fläche keine konphas bewegte Kolbenmembran, sondern eine flache, kreisrunde, bedämpfte, biegeweiche Platte. Zur Berechnung der Bewegung der Platte selbst wird die Kirchhoff'sche Plattengleichung hergeleitet. Zur Berechnung der Schallabstrahlung der Platte, die als ebener Strahler wirkt, wird nicht die Methode der Zerlegung in Monopolquellen nach Rayleigh sondern die Fourier-Transformation verwendet. Dabei wird die Bewegungsform der Platte in ebene Wellen zerlegt (Wellenzahlspektrum) und die Gesamtlösung durch Superposition der Beiträge der einzelnen Wellen gewonnen. Wegen der Rotationssymmetrie des Problems wird allerdings statt einer zweidimensionalen Fourier-Transformation eine Hankel-Transformation verwendet. Durch die vereinfachende Annahme einer unendlich großen Platte kann mit Hilfe der Wellenimpedanz und der Strahlungsimpedanz der unendlichen Platte vollständig im Spektralbereich gearbeitet werden.

Abstract

This diploma-thesis covers the derivation of the equations which describe the propagation of forced bending waves in thin plates and the analytical methods which can be used to calculate the sound radiation of those bending waves from the plate into the surrounding air. In particular the main focus of the work lies on the derivation of an analytical description of the sound radiation from the „Manger Sound Transducer“. The radiating surface of this transducer is not a rigid piston but a flat, circular, damped, pliable plate.
To calculate the movement of the plate we derive the governing equation of the Kirchhoff plate. For the calculation of the sound radiation of the plate, which acts as a plane radiator, we do not use Rayleigh's method of decomposition into monopole sources, but we decompose the movement of the plate into plane waves using Fourier-transformation (wavenumber spectrum). The overall solution is obtained by superposition of the contributions of the separate waves. Because of the axial symmetry of the problem we use a Hankel-transformation instead of a two-dimensional Fourier-transformation. By assuming the plate to be infinite one can use the wave-impedance and the radiation impedance of the infinite plate to work entirely in the spectral domain.

Vorwort

Da ich mich schon lange Zeit mit Elektroakustik befasse, hatte ich auch schon einiges über den „Manger-Schallwandler“ gehört. Viele Mythen begleiten diesen Namen, und einige Veröffentlichungen (eher nicht-technischer Natur) zum Thema tragen nicht gerade dazu bei, die tatsächliche Funktionsweise dieses Wandlers zu verstehen.
Als sich im persönlichen Gespräch mit Prof. Dr. Gerhard Graber vom Institut für Breitbandkommunikation (damals noch Institut für Nachrichtentechnik und Wellenausbreitung, INW) der Technischen Universität Graz die Möglichkeit einer Diplomarbeit ergab, sagte ich spontan zu.
Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis langer Recherchen und vieler Stunden, die ich damit verbrachte, tiefere Einsichten in die technische Mechanik und theoretische Akustik zu erlangen. Die Materie ist tatsächlich äußerst komplex, und hätte nicht die Skizze von Prof. Dr. Manfred Heckl (ehemals TU-Berlin) zur Verfügung gestanden, auf die die Firma Manger so gerne verweist, wäre ich nicht fähig gewesen, eine komplette Herleitung selbst zustande zu bringen.
Ich möchte Herrn Dr. Graber dafür danken, dass er mir bei der Ausarbeitung des Themas freie Hand und so viel Zeit gegeben hat, wie nötig war, um die Arbeit neben den üblichen Verpflichtungen im laufenden Studium abzuschließen.

Holger Hiebel

Graz, im November 2005

Inhaltsverzeichnis

Liste verwendeter Formelzeichen

A	Fläche $[m^2]$
A_m	Mechanische Admittanz $[m/(N\,s)]$
B'	Biegesteife der Platte $[N\,m^2]$
E	Elastizitätsmodul $[N/m^2]$
F	Kraft $[N]$
F_0	anregende Punktkraft
$F_{x,y,z}$	Kraft in x, y, z-Richtung
G	Schubmodul (Gleitmodul) $[N/m^2]$
$H_\nu^{(1)}$	Hankel-Funktion erster Art der Ordnung ν
$H_\nu^{(2)}$	Hankel-Funktion zweiter Art der Ordnung ν
I_ν	Modifizierte Bessel-Funktion erster Art der Ordnung ν
J_ν	Bessel-Funktion erster Art der Ordnung ν
K_ν	Modifizierte Bessel-Funktion zweiter Art der Ordnung ν, auch bekannt als modifizierte Bessel-Funktion dritter Art, Basset-Funktion, oder MacDonald-Funktion
L	Drall (Drehimpuls, Impulsmoment) $[kg\,m^2/s]$,$[N\,m\,s]$
M	Moment $[N\,m]$
N	Normalkraft $[N]$
$P(\omega)$	Fouriertransformierte des Druckes (Spektrum)
Q	Querkraft $[N]$
V	Volumen $[m^3]$
Y_ν	Bessel-Funktion zweiter Art der Ordnung ν, auch bekannt als Neumann-Funktion N_ν oder Weber-Funktion
Z_a	Akustische Impedanz (Flussimpedanz) $[N\,s/m^5]$
Z_m	Mechanische Impedanz $[N\,s/m]$
Z_{rad}	Strahlungsimpedanz $[N\,s/m^3]$
Z_W	Wellenimpedanz (Wandimpedanz) $[N\,s/m^3]$

a	Beschleunigung $[m/s^2]$
c	Wellengeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) $[m/s]$
c_0	Schallgeschwindigkeit in Luft
c_L	Schallgeschwindigkeit in Luft

$c_B, c_{B,ph}$	Phasengeschwindigkeit der Biegewelle
$c_{B,gr}$	Gruppengeschwindigkeit der Biegewelle
$\vec{e}_{x,y,z}$	Einheitsvektoren in $x-$,$y-$, oder $z-$Richtung
f	Frequenz $[Hz], [1/s]$ oder allgemein als Bezeichnung für eine Funktion
f_k	Koinzidenzfrequenz $[Hz]$
$\vec{f}$	Vektor der Verschiebungen (ξ, η, ζ bzw. u, v, w)
h	Gesamthöhe der Platte $[m]$
j	Imaginäre Einheit ($\sqrt{(-1)}$)
k	Wellenzahl (Ortsfrequenz) $[1/m]$
$k_{x,y,z,r}$	Wellenzahlen in x-, y- ,z- und radialer Richtung
k_B	Wellenzahl der Biegewelle
k_S	Wellenzahl des ebenen Strahlers
m	Masse [kg]
m'	Flächenbezogener Massenbelag $[kg/m^2]$
m_{ij}	Moment je Längeneinheit $[N]$ in der Schnittfläche $i = const.$, die Achse j verbiegend
p	(Schall-)Druck (negative Normalspannung) $[N/m^2]$
$\vec{p}$	Impuls $[N\,s]$
q	Querkraft je Längeneinheit $[N/m]$
q	Volumenfluss $[m^3/s]$
r	Radius $[m]$
$\vec{s}$	Spannungsvektor
t	Zeit $[s]$
v	Geschwindigkeit $[m/s]$
v_S	Strahlerschnelle in Normalrichtung des ebenen Strahlers $[m/s]$
Δ	Laplace-Operator (Summe der zweiten partiellen Ableitungen)
Θ	Massenträgheitsmoment $[kg\,m^2]$
Π	Ausbreitungsfunktion
Ψ	Geschwindigkeitspotential
γ	Gleitung (Schubverzerrung)
δ	Delta-Distribution (verallgemeinerte Dirac-Funktion) oder allgemeine Änderung einer Größe
ε	Dehnung
ε_V	Volumendehnung
ε_q	Querdehnung
ε_l	Längsdehnung
ζ	Verschiebung in z-Richtung
η	Verschiebung in y-Richtung
λ	Wellenlänge $[m]$

λ_B	Wellenlänge der Biegewelle $[m]$
λ_S	Wellenlänge der Welle auf einem ebenen Strahler$[m]$
λ_0	Wellenlänge der freien ebenen Welle in Luft $[m]$
μ	Querkontraktionszahl (Querdehnzahl, Querdehnungsbeiwert oder Poissonsche Zahl, auch mit ν bezeichnet)
ν	Querkontraktionszahl (auch mit μ bezeichnet) oder Ordnung der Zylinderfunktion
ξ	Verschiebung in x-Richtung
π	3.14159265
ρ	Dichte $[kg/m^3]$
σ	Spannung, im Besonderen die Normalspannung $[N/m^2]$
σ_{ij}	Spannung, die in der Ebene i in Richtung j wirkt
$\underline{\sigma}$	Spannungstensor
τ	Schubspannung (Scherspannung) $[N/m^2]$
ϕ	Erhebungswinkel in Bezug auf die Flächennormale des ebenen Strahlers
ω	Kreisfrequenz $[rad/s]$
∇	Nabla-Operator (Vektor der partiellen Ableitungen)
x, y, z	Kartesische Koordinaten
u, v, w	Verschiebungen in x, y, z-Richtung
ξ, η, ζ	Verschiebungen in x, y, z-Richtung

Abbildungsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Einleitung soll vorausblickend eine Übersicht über den Inhalt der vorliegenden Diplomarbeit gegeben werden. Die Arbeit selbst ist in 3 Teile gegliedert:

- Teil I enthält verschiedene Kapitel, in denen Grundlagen aufgearbeitet werden (Aufbau des Manger-Schallwandlers, Festigkeitslehre, Berechnungsmethode für die Abstrahlung vom ebenen Strahler).
- Teil II enthält prinzipielle Betrachtungen zu Biegewellen-Schallwandlern und die analytische Beschreibung des Manger-Schallwandlers.
- Teil III enthält die Anhänge. Hier sollte alles zu finden sein, was man ansonsten in Nachschlagewerken suchen müsste.

Das Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und das Abbildungsverzeichnis sind am Anfang zu finden (direkt nach dem Inhaltsverzeichnis), das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

1.1 Biegewellen

In dieser Arbeit geht es um elektroakustische Wandler (Lautsprecher), die *gezielt* Biegewellen zur Abstrahlung von Schall nutzen.
Biegewellen (siehe Abb. 1.1 auf der nächsten Seite) sind gemischt longitudinale / transversale Wellen. Sie sind deshalb für die Akustik relativ wichtig, weil sie leicht in dünnen Platten entstehen können und durch die transversale Auslenkung ihrer Oberfläche in der Lage sind, in die umgebende Luft Schall abzustrahlen. Ein Charakteristikum der Biegewelle ist, dass sie „dispersiv“ ist, d. h. eine frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt. Alle anderen Wellenarten besitzen eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit. Genaueres hierzu ist in Kapitel 4 über Wellenerscheinungen enthalten.

Wie gesagt breiten sich Biegewellen hauptsächlich in dünnen Platten aus. Die schallabstrahlenden Flächen der kommerziell erhältlichen Biegewellen-Schallwandler sind

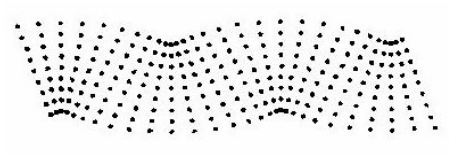


Abbildung 1.1: Darstellung einer Biegewelle

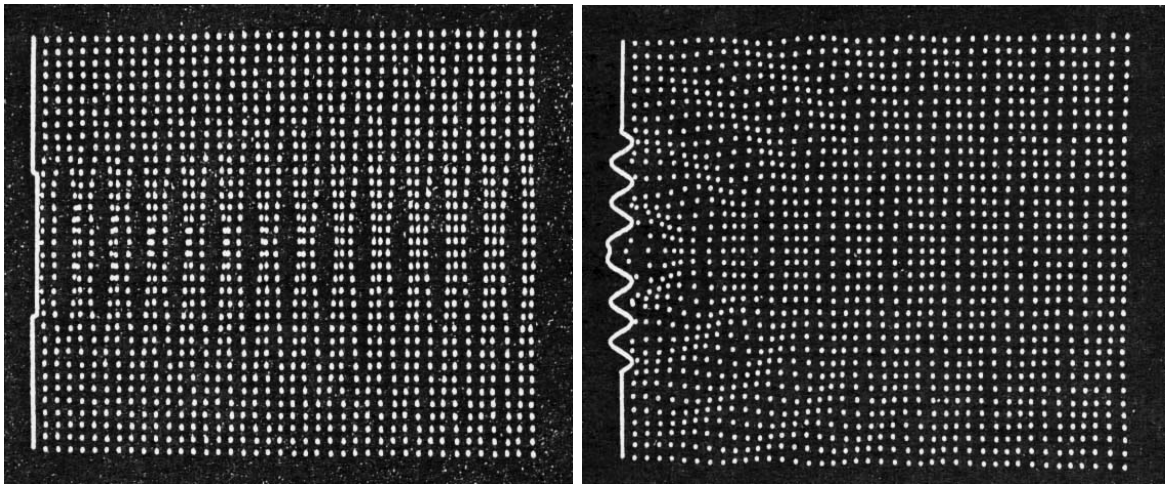
daher dünne Platten. Um die Abstrahlung von solchen Platten bestimmen zu können, muss die Bewegung berechenbar sein, die durch auf die Platte wirkende Kräfte hervorgerufen wird. Die Differentialgleichung, die die Bewegung dünner Platten beschreibt, nennt sich die „Kirchhoff'sche Plattengleichung". Zu ihrer Herleitung ist es notwendig, grundlegende Zusammenhänge aus der Festigkeitslehre zu benutzen. Diese Zusammenhänge werden in Teil I der Arbeit (Kapitel 3) hergeleitet bzw. gegebenenfalls postuliert. Die Herleitung der Plattengleichung selbst ist dann in Teil II (Kapitel 6) enthalten. In Kapitel 7 werden wir uns mit der Lösung der Plattengleichung beschäftigen, also die Bewegung der angeregten Platte studieren.

1.2 Strahlerarten

Traditionellerweise besitzen Lautsprecher Membrane, die möglichst konphas (an jeder Stelle mit derselben Phase, d. h. als Ganzes) im Takte des angelegten Signals vor- und zurückbewegt werden. Man spricht dabei oft von einer „Kolbenmembran" (siehe Abb. 1.2(a)).
Bei Biegewellen-Schallwandlern breiten sich, ausgehend von der Anregestelle, Biegewellen auf der „Membran" aus, die zu einer Schallabstrahlung in die Umgebung führen (siehe Abb. 1.2(b)). Aus der Sicht der Festigkeitslehre ist die Bezeichnung „Membran" allerdings falsch, denn eine Membran ist eigentlich eine eingespannte, biegeschlaffe Struktur.

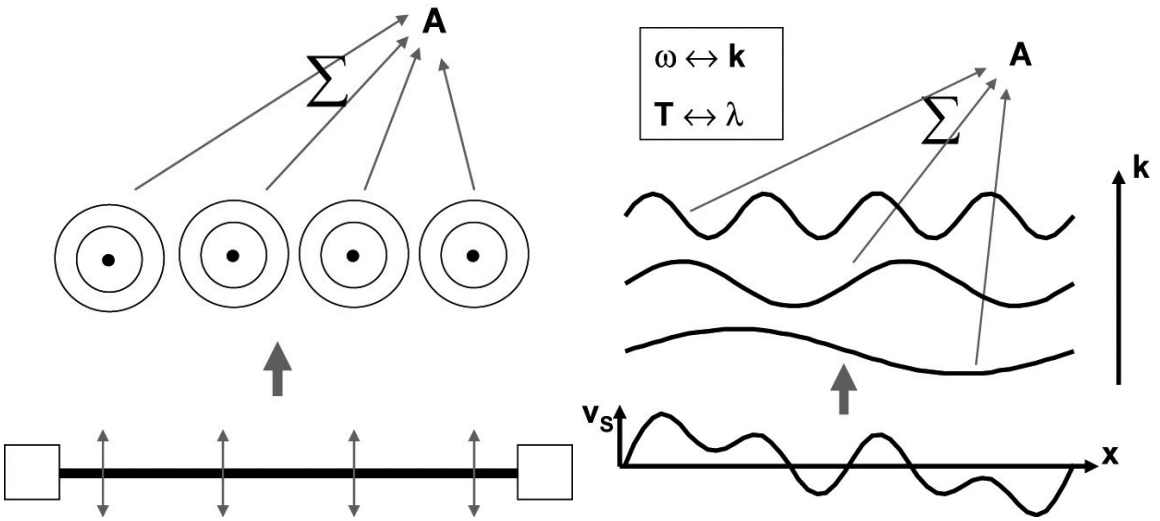
1.3 Abstrahlung von Biegewellen

Die Berechnung der Schallabstrahlung von der Kolbenmembran geschieht klassischerweise mit der Methode von Rayleigh (siehe Abb. 1.3(a)). Dabei wird die abstrahlende Fläche in infinitesimal kleine Punktstrahler zerlegt. Die Anteile der Punktstrahler (Kugelwellen) werden für den Aufpunkt summiert (integriert) und ergeben so den Schalldruck an diesem Punkt.
Für ebene Strahler gibt es aber noch eine andere Methode, die Schallabstrahlung zu berechnen (siehe Abb. 1.3(b)). Bei diesem Verfahren wird die Strahlerschnelle durch Fourier-Transformation in ebene Wellen zerlegt (Wellenzahlspektrum). Die Beiträge der einzelnen ebenen Wellen zum Schallfeld in der Luft (Grundlösung) werden dann wiederum für den Aufpunkt summiert bzw. integriert. Die Grundlösung für den Fall, dass sich auf dem ebenen Strahler eine einzelne ebene Welle fortbewegt, wird durch



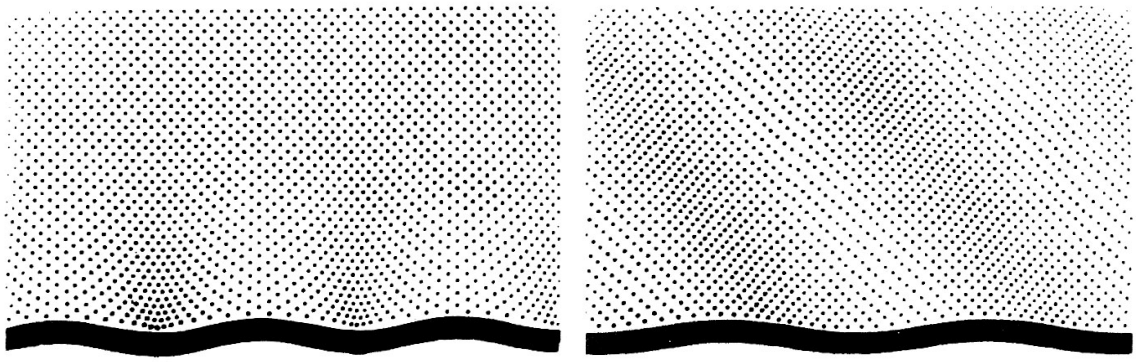
(a) Abstrahlung von der Kolbenmembran (b) Abstrahlung einer Biegewelle

Abbildung 1.2: Beispiele für die Schallabstrahlung von Kolbenstrahler und Biegewellenstrahler, aus [Möser 1988], S. 12 und S. 90



(a) Berechnung nach Rayleigh (Zerlegung in Punktstrahler) (b) Berechnung über das Wellenzahlspektrum (Zerlegung in Wellen)

Abbildung 1.3: Methoden zur Berechnung der Schallabstrahlung von ebenen Schallwandlern



(a) Exponentielles Nahfeld, $\lambda_S < \lambda_0$ (b) Abstrahlung ins Fernfeld, $\lambda_S > \lambda_0$

Abbildung 1.4: Verschiedene Fälle der Grundlösung (einzelne ebene Welle bewegt sich nach rechts auf dem ebenen Strahler fort)

eine Formel angegeben, die 2 Fälle einschließt. Diese sind auch in Abbildung 1.4 dargestellt:

1. Ist die Welle auf dem Strahler „kurzwellig“ gegenüber der Welle in der Luft, d. h. ist $\lambda_S < \lambda_0$, so entsteht nur ein Nahfeld in der Luft.
2. Ist die Welle auf dem Strahler „langwellig“ gegenüber der Welle in der Luft, d. h. ist $\lambda_S > \lambda_0$, so wird eine Welle in die Luft abgestrahlt.

Die eben angerissenen Grundlagen zur Berechnung der Schallabstrahlung mittels Wellenzahlspektrum werden in Teil I (Kapitel 5) behandelt.

1.4 Verfügbare Biegewellenwandler

Im Großen und Ganzen gibt es 3 grundlegend verschiedene, kommerziell verfügbare Biegewellenwandler. Diese sind in Abb. 1.5 auf der nächsten Seite dargestellt.
Wie bereits erwähnt, weisen Biegewellen Dispersion auf. Genauer gesagt ist dabei

$$\lambda_B \propto \frac{1}{\sqrt{f}} \qquad \lambda_L \propto \frac{1}{f}$$

Die Frequenz, bei der λ_B gleich λ_0 wird, heißt „Koinzidenzfrequenz“. Ihre Lage ist ein wichtiges Unterscheidungskriterium bei Biegewellen-Schallwandlern.
Die Unterschiede zwischen den verfügbaren Modellen werden wir in Kapitel 8.1.2 genauer erklären. Die Berechnung der Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers werden wir dann in Kapitel 8.2 auf Seite 98 durchführen.

Als Nächstes wollen wir uns aber den Aufbau des Manger-Schallwandlers etwas genauer ansehen.

(a) Der Manger-Schallwandler (b) DML-Panels von NXT (c) DDD-Biegewellenwandler von German Physiks

Abbildung 1.5: Verschiedene kommerziell verfügbare Biegewellen-Schallwandler

Kapitel 2

Aufbau des Manger-Schallwandlers

Der Manger-Schallwandler (Abbildungen 2.2, 2.3 und 2.4) besteht aus einer flachen, kreisrunden, biegeweichen Platte mit einem Durchmesser von 190 mm, die aus 3 Lagen eines sehr weichen Kunststoffes aufgebaut ist. Diese Platte ist am äußeren Rand mit einem Schaumstoffring am CNC-gefrästen Korb angeklebt, aber nicht eingespannt. Der Querschnitt des Manger-Schallwandlers ist in Abbildung 2.1 dargestellt:

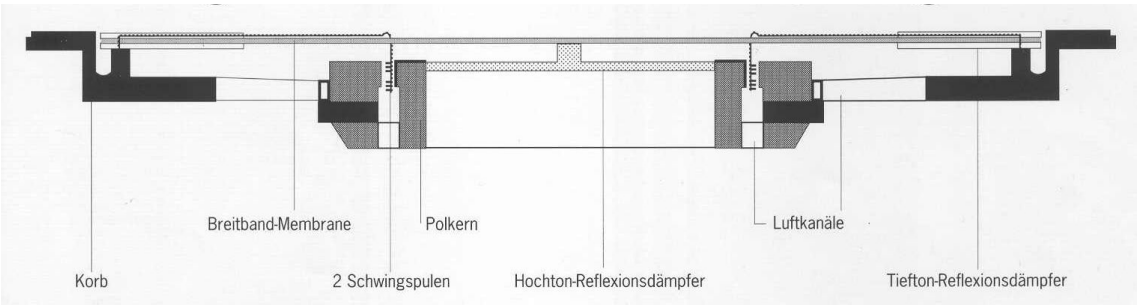


Abbildung 2.1: Querschnitt des Manger-Schallwandlers

Eine sehr leichte (0,4 Gramm), radialsymmetrisch und zentrisch an der Platte angebrachte, vom Signal stromdurchflossene Schwingspule mit einem Durchmesser von 7 Zentimetern befindet sich im Luftspalt des Magnetsystems. Der Antrieb erfolgt also nach dem herkömmlichen elektrodynamischen Prinzip (wenn auch die Wicklung der Schwingspule nach einem Manger-Patent geschieht, um die Induktivität und das Gewicht klein zu halten).
In der Mitte wird die Platte von hinten gedämpft und am äußeren Rand soll ein rundum verlaufender, sternförmiger Dämpfer (neuneckig) aus einem weichen Schaumstoff ebenfalls einen reflexionsfreien Abschluss erzeugen.

Wie lässt sich nun die Schallabstrahlung des Wandlersystems von Manger analytisch (also nicht numerisch) beschreiben?

Da eine analytische Lösung gefunden werden soll, ist es klar, dass einige Vereinfachungen zu treffen sein werden.

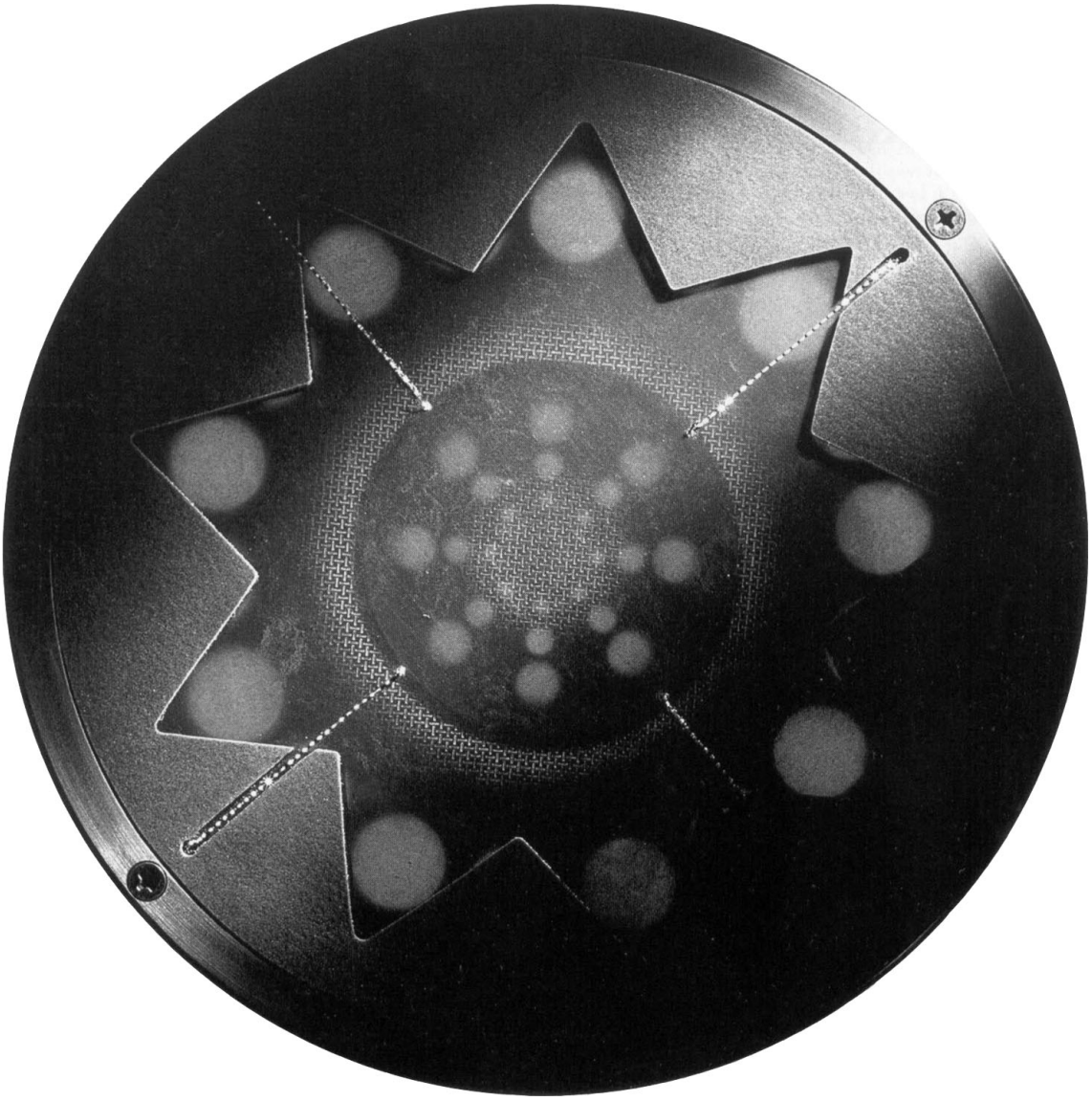


Abbildung 2.2: Frontal-Ansicht des Manger-Schallwandlers

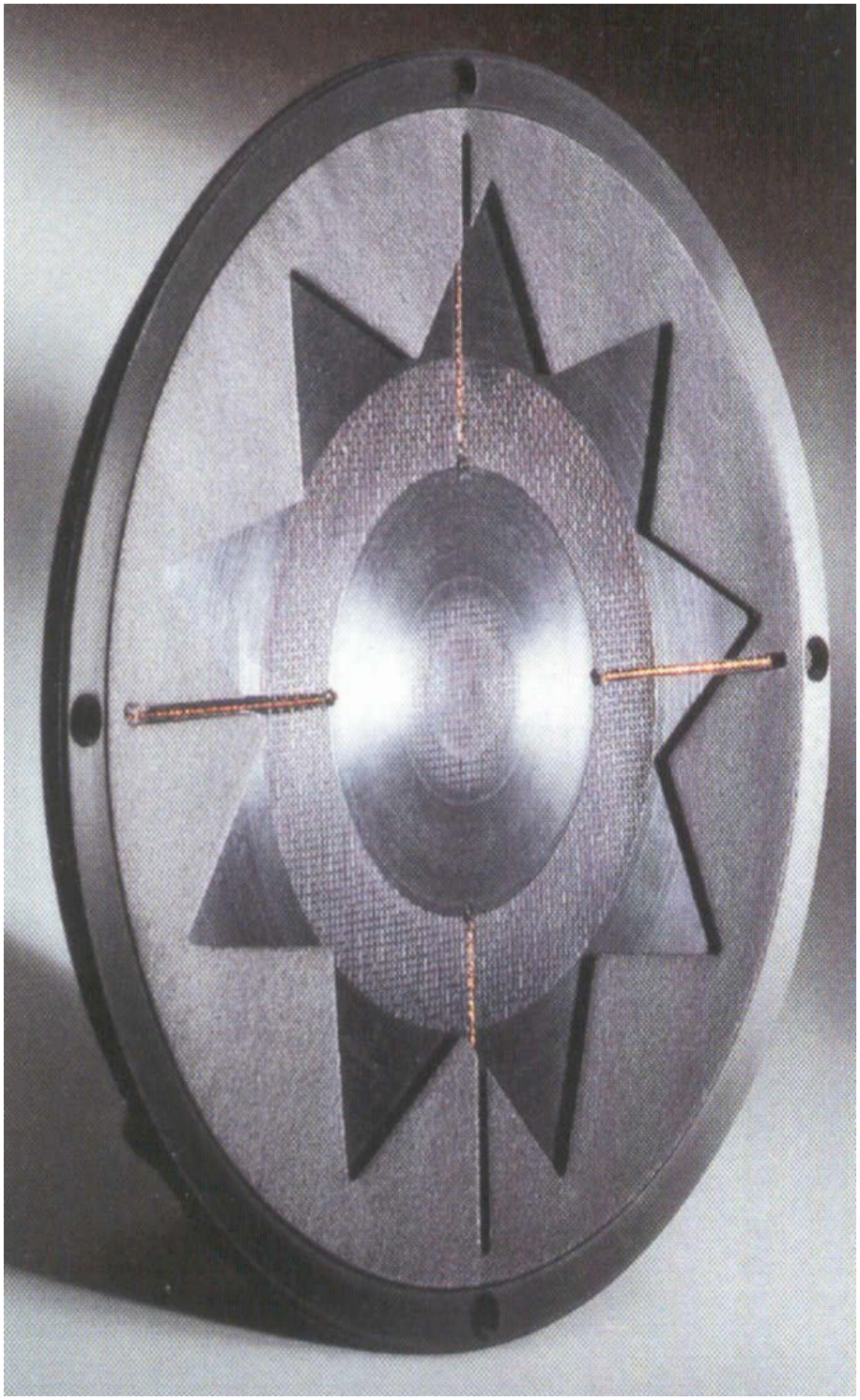


Abbildung 2.3: Ansicht des Manger-Schallwandlers schräg von vorne

Abbildung 2.4: Rückansicht des Manger-Schallwandlers

Im Grunde genommen stellt das Problem ein gekoppeltes Feldproblem dar, da die umgebende Luft auch eine Rückwirkung auf die Platte hat (Strahlungsbelastung). In erster Näherung vernachlässigen wir diese Rückwirkung, weil sie sehr klein ist (würde die Platte hingegen in Wasser abstrahlen, wäre sie nicht mehr vernachlässigbar).
Da wegen der Dämpfer im Zentrum und am Rand näherungsweise keine Reflexion der Biegewellen erfolgt, wird die Platte in erster Näherung als unendlich ausgedehnt modelliert. Die Eigendämpfung des Plattenmaterials wird aber ebenso vernachlässigt wie das Eigengewicht der Schwingspule.

Um die Abstrahlung analysieren zu können, muss man dann zunächst die Gleichungen herleiten, die die Bewegung der Platte beschreiben, da diese Bewegung eine Kompression bzw. Expansion der Luft vor der Platte zur Folge haben wird. Auf der Basis der Erkenntnisse der Festigkeitslehre (Kapitel 3 auf Seite 15) werden wir in Kapitel 6 auf Seite 57 die Plattengleichung herleiten.
Die Kompressions- und Expansionsphasen vor der Platte werden unter gewissen, im Laufe der Arbeit noch zu erörternden, Voraussetzungen zur Ausbreitung einer Schallwelle in der Luft führen: Kennt man die Bewegungsgleichung der Platte, so kann man die Abstrahlung als klassisches Randwertproblem mit vorgegebener Strahlerschnelle behandeln (siehe Kapitel 5). Im Fall der unendlichen Platte kann man sogar auf eine Methode zurückgreifen, mit der man rein im Spektralbereich arbeiten kann und die Strahlerschnelle gar nicht explizit kennen muss (siehe Kapitel 5.4).
Da letzten Endes die Abhängigkeit des Schalldrucks an einem bestimmten Ort im Raum (Aufpunkt) von der an der Schwingspule anliegenden Spannung bzw. dem durch die Schwingspule fließenden Strom gefragt ist, wird auch noch die mechanische Impedanz am Ort der Schwingspule („Eingangsimpedanz“) interessant sein (siehe Kapitel 7.3).

Als nächstes wollen wir jedoch die Grundlagen der Festigkeitslehre erläutern, auf die wir bei der Herleitung der Plattengleichung zurückgreifen werden.

Kapitel 3

Festigkeitslehre

In diesem Abschnitt werden wir die grundlegenden Erkenntnisse der Festigkeitslehre herleiten bzw. postulieren. Auf diese Erkenntnisse werden wir in Kapitel 6 zurückgreifen - dort wird die Kirchhoff'sche Plattengleichung hergeleitet. Die Kirchhoff'sche Plattengleichung ist die klassische Gleichung, die die Bewegung dünner Platten (und damit auch die Biegewellenausbreitung auf dünnen Platten) beschreibt. Die Abbildungen in diesem Abschnitt sind dem Werk [Berger 1994] entnommen.

3.1 Einleitung

Die Festigkeitslehre beschäftigt sich mit den Verformungen von elastischen Körpern und den in ihnen herrschenden Kräfteverteilungen (Spannungen) bei äußeren Belastungen. Als ingenieurstechnische Disziplin der Bauingenieure und Maschinenbauer macht sie Gebrauch von den Ergebnissen der klassischen (also linearisierten) Elastizitätstheorie und wendet diese auf einfache Strukturen an (siehe Abb. 3.1, die Pfeile stehen dabei für die von außen einwirkenden Kräfte). Diese Grundstrukturen sind auch als Elemente in Finite-Elemente-Programmen aus der Mechanik wiederzufinden. Schon allein deshalb lohnt sich eine kurze Auseinandersetzung mit der Materie.

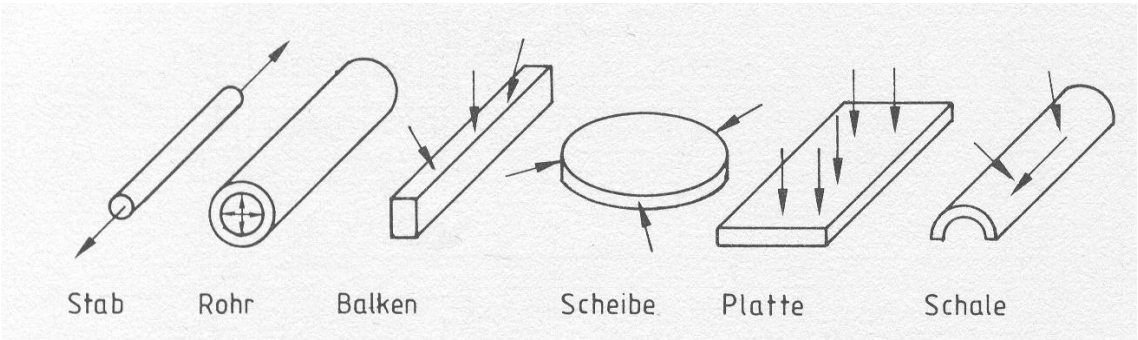


Abbildung 3.1: Typische Grundformen für Bauteile in der Festigkeitslehre

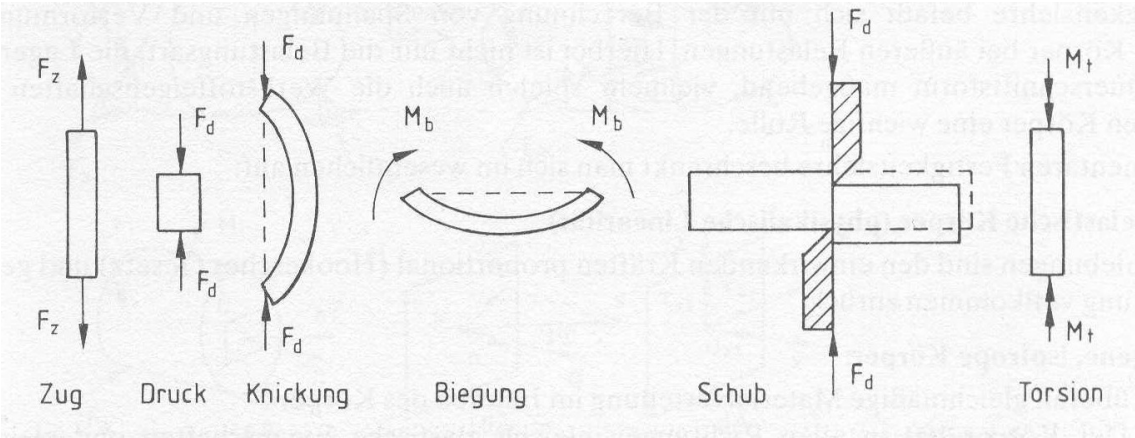


Abbildung 3.2: Grundbeanspruchungen der Bauteile in der Festigkeitslehre

Jetzt sollte klar sein, warum beim Manger-Schallwandler oft von einer Platte oder einer Plattenmembran gesprochen wird: Der Begriff *Membran* hat sich zwar in der Lautsprecherwelt für jegliche Fläche eingebürgert, die Schall abstrahlen soll, aber nach der Einteilung der Festigkeitslehre ist diese Fläche beim Manger-Schallwandler als *Platte* zu bezeichnen (mehr hierzu in Kapitel 6 auf Seite 57).

Man sollte sich auch bewusst sein, dass äußere Kräfte in der Natur immer Flächen- oder Volumenkräfte sind. So ist zum Beispiel die Reibung eine Flächenkraft und die Gravitation eine Volumenkraft. Die Kraft, die an einem Punkt angreift gibt es in Wirklichkeit nicht. Sie ist eine Vereinfachung, die gerechtfertigt ist, wenn die tatsächliche Kräfteverteilung für die Lösung des Problems ohne Belang ist, und entsteht durch Integration der verteilten Kraftdichten.
Nichtsdestotrotz kann man die Belastungen der Bauteile nach der Richtung der äußeren Kräfte einteilen (siehe Abb. 3.2).
Wir werden sehen, dass hauptsächlich die Biegung von Interesse für unser Problem ist.

3.2 Elastizitätstheorie

Wie bereits erwähnt, stützt sich die elementare Festigkeitslehre auf die linearisierte Elastizitätstheorie, also die Elastizitätstheorie kleiner Verschiebungen. Im Rahmen dieser Theorie werden folgende Vereinfachungen gegenüber der allgemeinen Elastizitätstheorie getroffen (vgl. [Berger 1994], S. 20 und [Parkus 1983], S. 175):

1. Linear-elastische Körper (physikalische Linearität)

2. Homogene, isotrope Körper

3. Kleine Verformungen (geometrische Linearität)

4. Quasistationäre Formänderung

Dabei hat die geometrische Linearisierung (Punkt 3) zur Folge, dass

- alle Kräfte am unverformten Körper angesetzt werden (d.h. für die Momentenbeziehungen werden die Verformungen bei Hebelarmen nicht berücksichtigt)
- zwischen den Verschiebungen und den Verdrehungen lineare Zusammenhänge angenommen werden.

Eine hervorragende Einführung in die linearisierte Elastizitätstheorie liefert [Rieg und Hackenschmidt 2000], S. 24 ff. In [Parkus 1983] ist ebenfalls eine Einführung in die allgemeine Elastizitätstheorie (S. 159 ff.) und deren Linearisierung (S. 175 ff.) zu finden.

3.2.1 Spannungen

Es ist wohl klar, dass feste Körper sich unter Krafteinwirkung deformieren (also im Allgemeinen verschieben bzw. verformen) werden. Diese Deformation muss über Materialparameter mit den äußeren Kräften, die auf den Körper wirken, verknüpft sein. Wir werden daher zunächst den Begriff der *Spannung* kennen lernen, der die Kräfte beschreibt, die im Inneren eines Körpers wirken. Dann werden wir uns mit den *Deformationen* beschäftigen, um schließlich den *Zusammenhang* zwischen beiden Größen zu studieren.

Definition der Spannungen

Bei der Weiterleitung der äußeren Kräfte durch den Körper entstehen als Reaktionen im Körperinneren an jeder Stelle innere Kräfte, die die einzelnen Körperelemente in Spannung versetzen und Verformungen hervorrufen (vgl. [Berger 1994], S. 21). Durch einen gedachten Schnitt kann der Körper zerteilt werden. Dadurch werden die inneren Kräfte zu äußeren und lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nach dem Schnittprinzip bestimmen. Dieses Prinzip ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Es gibt immer zwei Schnittufer. Die Kräfte und Momente sind an den Ufern einander entgegen gerichtet (actio=reactio).
Das Maß für die Beanspruchung des Bauteils ist die je Flächeneinheit übertragene Kraft, die als Spannung bezeichnet wird:

$$\vec{s} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{d\vec{A}} \tag{3.1}$$

Dies ist sinnvoll, da, wie schon erwähnt, im Körper keine Einzelkräfte existieren, sondern an jeder Stelle Kräfte in jede Richtung übertragen werden können.
Der Spannungsvektor ist im Allgemeinen schräg zum Flächenelement orientiert und kann nach Abb. 3.3 in eine Komponente σ senkrecht zur Schnittfläche (die „Normalspannung“) und eine Komponente τ tangential zur Schnittfläche (die „Tangential-,

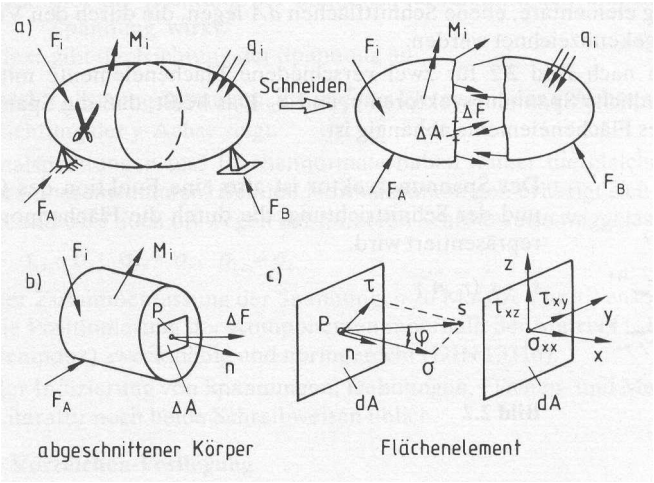


Abbildung 3.3: Schnittreaktionen am belasteten Körper

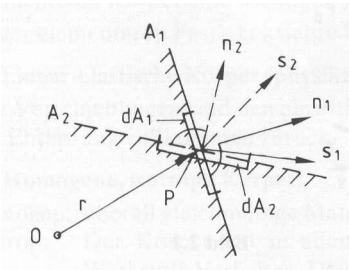


Abbildung 3.4: Abhängigkeit der Spannungen von der Schnittrichtung

Schub- oder Scherspannung“) zerlegt werden. Die Schubspannungskomponente wird in der Schnittfläche nochmals in zwei Komponenten zerlegt, so dass alle Komponenten senkrecht aufeinander stehen.
In einzelnen Körperpunkten werden sich bei Belastung im Allgemeinen verschiedene Spannung einstellen. In *jedem* Punkt aber lässt sich in *jeder beliebigen Richtung* eine elementare, ebene Schnittfläche dA legen - siehe Abbildung 3.4.

Das bedeutet, dass die Spannung

- ortsabhängig und
- richtungsabhängig ist.

„Kennt man in einem Punkt die Spannung in drei zueinander senkrechten Ebenen, so lässt sich die Spannung in jeder beliebigen anderen Schnittebene durch diesen Punkt angeben.
Man kann daher den Spannungszustand in einem Punkt P vollständig beschreiben, wenn man in der Umgebung des Punktes einen Elementquader mit den Kanten dx, dy, dz herausschneidet und dessen Spannungen ermittelt“ ([Berger 1994], S. 22).

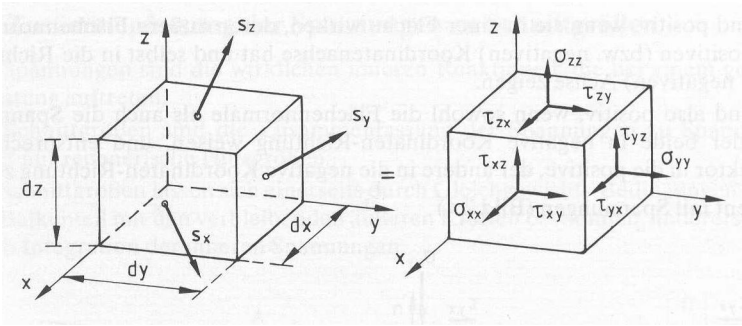


Abbildung 3.5: Spannungen am Quaderelement

Bezeichnung der Spannungen

Um die Lage und Orientierungen der Spannungen durch Indizes und Vorzeichen festlegen zu können, werden folgende Richtlinien für die Bezeichnungen vereinbart (siehe auch Abb. 3.5):

Indizes
1. Index: gibt die Richtung der äußeren Flächennormalen und damit die Ebene an, in der die Spannung wirkt.
2. Index: gibt die Richtung der Spannung an.
In der Kontinuumsmechanik werden der Einheitlichkeit halber oft alle Spannungen konsequent mit σ bezeichnet. Ansonsten ist es jedoch üblich die Schubspannungen mit τ zu bezeichnen. „Normalspannungen und Flächennormale haben immer die gleiche Richtung, so dass die beiden Indizes übereinstimmen. Bei den Normalspannungen erübrigt sich demnach eigentlich der zweite Index und wird auch oft wegen der kürzeren Schreibweise weggelassen“ ([Berger 1994], Seite 23):

$$\sigma_{xx} = \sigma_x \qquad \sigma_{yy} = \sigma_y \qquad \sigma_{zz} = \sigma_z$$

Vorzeichen
Dazu [Berger 1994], Seite 23:
„Die Vorzeichen der Spannungen werden wie bei Schnittgrößen festgelegt: Spannungen sind positiv, wenn sie am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung, bzw. am negativen Schnittufer in negative Koordinatenrichtung zeigen. Ein Schnittufer ist positiv, wenn seine äußere Flächennormale den gleichen Richtungssinn hat wie die entsprechende zu ihr parallele Koordinatenachse.

- Normalspannungen sind positiv, wenn sie in Richtung der äußeren Flächennormalen wirken, d.h. Zugspannungen sind positiv, Druckspannungen sind negativ.

- Bei den Schubspannungen ist eine Vorzeichen-Unterscheidung physikalisch nicht gegeben. Eine Vorzeichen-Regelung für Schubspannungen hat nur für die Festlegung der Richtung innerhalb der Schnittfläche Bedeutung.

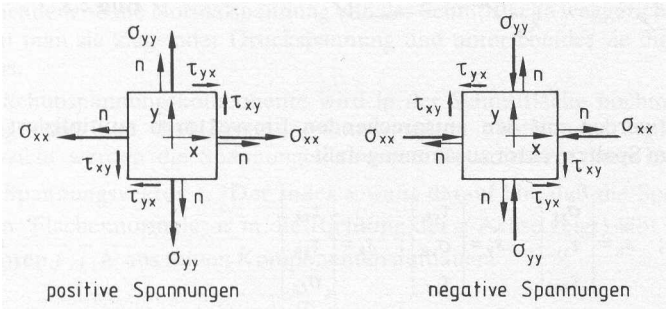


Abbildung 3.6: Vorzeichenkonvention bei Spannungen

Schubspannungen sind positiv, wenn sie in einer Fläche wirken, deren äußere Flächennormale die Richtung einer positiven (bzw. negativen) Koordinatenachse hat und selbst in die Richtung einer positiven (bzw. negativen) Achse zeigen.
Schubspannungen sind also positiv, wenn sowohl die Flächennormale als auch die Spannung beide in positive oder beide in negative Koordinatenrichtung weisen, und entsprechend negativ, wenn ein Vektor in die positive, der andere in die negative Koordinaten-Richtung zeigt.“
Diese Sachverhalte sind auch gut in Abbildung 3.6 zu erkennen.

Spannungstensor

Die Spannung in einem Körper kann also als Tensorfeld beschrieben werden (Näheres dazu im Anhang C auf Seite 137). Der Spannungstensor (ein Tensor 2. Stufe, im Text gekennzeichnet durch Unterstreichung) hat 9 Komponenten. Diese können in Form einer Matrix angeschrieben werden, die Matrixschreibweise ist jedoch *nicht* kennzeichnend für einen Tensor.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

In der Hauptdiagonale sind die Normalspannungen angeordnet, die übrigen Komponenten sind die Schubspannungen.
Beim **ebenen Spannungs-Zustand** ist $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. In der Matrixdarstellung finden sich dann Nullstellen an den entsprechenden Stellen:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Der Spannungstensor des **einachsigen Spannungs-Zustandes** enthält nur ein einziges Element: σ_{xx}

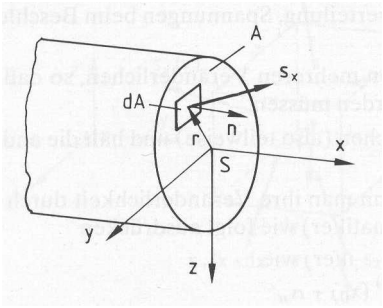


Abbildung 3.7: Integration der Spannungen zu Schnittgrößen

Zusammenfassung der Spannungen zu Schnittgrößen

Dazu aus [Berger 1994], S. 25: „Die Spannungen sind die wirlichen inneren Reaktionen, die bei einem gelagerten Körper unter Belastung auftreten. Die Schnittgrößen sind die Zusammenfassungen der Spannungen zu Spannungs-Resultanten und daher nur rechnerische Hilfsgrößen.
Die Schnittreaktionen lassen sich einerseits durch Gleichgewichts-Bedingungen an einem abgeschnittenen Bauteil mit den verbleibenden äußeren Kräften bestimmen, andererseits erhält man sie auch durch Integration der inneren Spannungen.“
In Abbildung 3.7 ist erkennbar, wie am Balken ein Schnittflächenelement dA, an dem eine Spannung $\vec{s_x}$ wirkt, zu Kraft und Moment (hier bezogen auf den Schwerpunkt S) an der Schnittfläche beitragen.

$$d\vec{F_s} = \vec{s_x} \cdot dA$$

$$d\vec{M_s} = \vec{r} \times d\vec{F_s}$$

Die Integration (Summierung der infinitesimalen Beiträge) über die gesamte Schnittfläche A ergibt dann die Schnittkraft $\vec{F_s}$:

$$\vec{F_s} = \begin{bmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \int\limits_A d\vec{F_s} = \int\limits_A \vec{s_x}\, dA = \int\limits_A \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} dA$$

und das gesamte Schnittmoment $\vec{M_s}$:

$$\vec{M_s} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \int\limits_A d\vec{M_s} = \int\limits_A \vec{r} \times d\vec{F_s} = \int\limits_A (\vec{r} \times \vec{s_x})\, dA = \int\limits_A \begin{vmatrix} \vec{i} & 0 & \sigma_{xx} \\ \vec{j} & y & \tau_{xy} \\ \vec{k} & z & \tau_{xz} \end{vmatrix} dA$$

Die einzelnen Komponenten der Schnittgrößen bestimmen sich also zu:

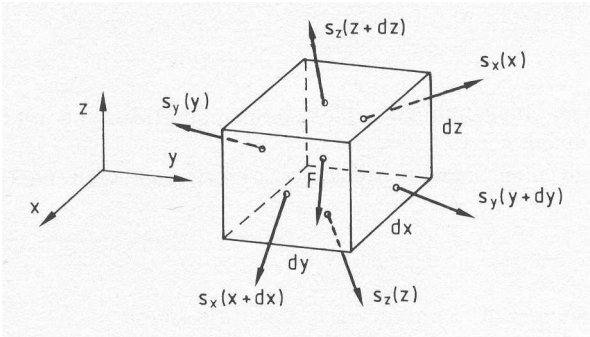


Abbildung 3.8: Spannungen am Elementarquader

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int_A \sigma_{xx}\, dA & M_x &= \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy})\, dA \\
Q_y &= \int_A \tau_{xy}\, dA & M_y &= \int_A z\sigma_{xx}\, dA \\
Q_z &= \int_A \tau_{xz}\, dA & M_z &= \int_A y\sigma_{xx}\, dA
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums

Die Spannungen sind Funktionen des Ortes, der Schnittrichtung und im Allgemeinen auch der Temperatur und der Zeit, also Funktionen mehrerer Variablen. Ihre Änderungen werden daher durch partielle Differentiale ausgedrückt.
Untersucht man die Veränderung der Spannung in einer bestimmten Richtung x, so kann man in diese Richtung eine Taylorreihenentwicklung vornehmen. Man erhält z. B. für die Normalspannung an der Stelle $x + dx$:

$$\sigma(x+dx) = \sigma(x) + \frac{dx}{1!}\,\sigma'(x) + \frac{(dx)^2}{2!}\,\sigma''(x) + \ldots = \sigma(x) + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\,dx + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\,\frac{(dx)^2}{2!} + \ldots$$

Im linearen Elastizitätsbereich sind die Änderung der Spannungen und der Verformungen klein, daher ist es auch in der Praxis gerechtfertigt, zu linearisieren. Es wird also nur das erste Korrekturglied der Reihenentwicklung berücksichtigt und es ergibt sich für die Spannung an der Stelle $x + dx$ der linearisierte Zusammenhang:

$$\sigma(x+dx) = \sigma(x) + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\,dx \tag{3.5}$$

So kann an einem Elementarquader (siehe Abb. 3.8 und Abb. 3.9) für die Spannungskomponenten an jeder Seitenfläche vorgegangen werden. Der Vektor $\vec{F}$ symbolisiert

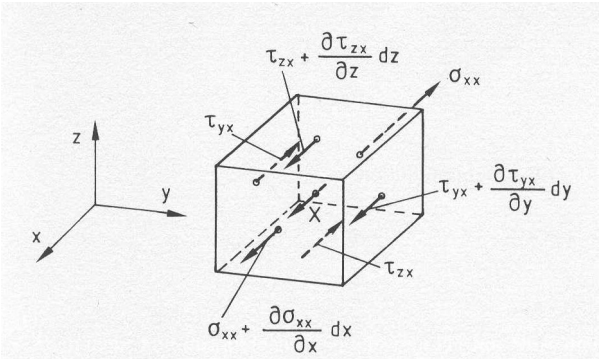


Abbildung 3.9: Spannungskomponenten am Elementarquader

dabei eine äußere Volumenkraft (Fernkraft), die auf das Element wirkt. Sie wird, da sie eine Raumkraft ist, auf die Volumeneinheit bezogen.
Nun bilden wir das Kräftegleichgewicht: Die mit den zugehörigen Flächen multiplizierten Spannungen und die mit dem Volumen dV multiplizierte Raumkraftdichte müssen im Gleichgewicht sein. Dabei heben sich die Größen erster Ordnung auf (siehe [Berger 1994], S. 27). Nach Division durch $dV = dx\,dy\,dz$ ergeben sich die Gleichgewichts-Bedingungen des Kontinuums, die den Spannungs-Zustand mit dem Feld der spezifischen Raumkraft verknüpfen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0
\end{aligned}$$

Fasst man die Spannungskomponenten zum Spannungstensor in Matrixnotation zusammen, lässt sich in Kurzform schreiben:

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \vec{F} = 0 \tag{3.6}$$

Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen
Eine Eigenheit des Spannungstensors können wir herleiten, indem wir das Momentengleichgewicht um Achsen durch den Schwerpunkt eines Volumenelementes bilden (siehe auch Abb. 3.10).
Momentenanteile bedingt durch Unterschiede der Spannungen brauchen nicht berücksichtigt werden, da sie klein von höherer Ordnung sind und beim Grenzübergang wegfallen. Die aus den Normalspannungen gebildeten Kräfte liefern keinen Beitrag zu den Momenten um die durch den Schwerpunkt gelegte z-Achse. Es bleibt nur das Gleichgewicht zweier Kräftepaare:

$$\sum M_z = 0 = (\tau_{xy}\, dydz)dx - (\tau_{yx}\, dxdz)dy \qquad | \div (dxdydz) \tag{3.7}$$

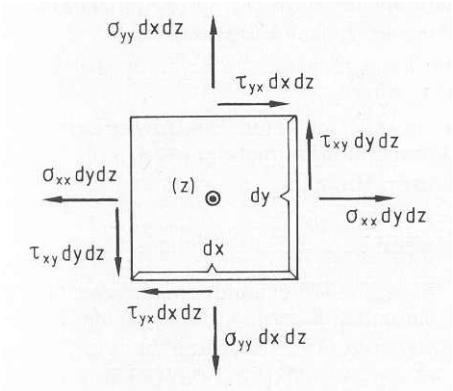


Abbildung 3.10: Zugeordnete Schubspannungen

Zyklisch ergänzt, ergibt sich daraus der **Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen**:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}} \tag{3.8}$$

Der Spannungstensor ist somit symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen und enthält nur 6 voneinander unabhängige Spannungskomponenten: σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}. Die Angabe dieser 6 Komponenten ist notwendig und hinreichend, den Spannungszustand in einem Punkt eines Körpers festzulegen.
Die Spannungen sind als Unbekannte aus den äußeren Kräften und den geometrischen Daten des betrachteten Querschnitts zu ermitteln.
Bei der Deformation eines Körpers kommen zu den 6 unbekannten Spannungen noch 3 Verschiebungen u, v, w (oft auch mit ξ, η, ζ bezeichnet) in Richtung der Koordinatenachsen x, y, z als Unbekannte hinzu, so dass insgesamt 9 Unbekannte entstehen. Zu deren Bestimmung stehen 3 Gleichgewichts-Bedingungen und 6 Gleichungen aus den Deformations- und Werkstoffgesetzen zur Verfügung.

3.2.2 Deformationen

Wie aus anderen Bereichen der Technik bekannt, ist die Vorgehensweise für die Bestimmung der Formänderung eines Körpers die folgende:

1. Man zerlegt den Körper gedanklich in lauter kleine, quaderförmige Elemente,
2. bestimmt die Verformungen von sämtlichen Elementen und
3. denkt sich den Körper aus den verformten Elementen wieder so aufgebaut, dass nirgends Klaffungen oder Überlappungen auftreten (Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen).

Dann ist die Formänderung des ganzen Körpers bekannt. Bei einfachen Körperformen und Beanspruchungen kann man die Verformung des gesamten Körpers oder großer Teile von ihm zusammenfassend ermitteln.
Die Kontinuumsmechanik gliedert die allgemeine Deformation eines belasteten Körpers in 3 Einflüsse: Translation, Rotation und Verzerrung. Dabei ist die Verzerrung die eigentliche Gestaltänderung des Körpers.
Bei der Verzerrung können wiederum zwei typische Grundformen an jedem Körperelement auftreten:

- die Dehnung ε (= relative Längenänderung aufgrund einer Normalspannung σ) und
- die Gleitung γ (= Schubverzerrung = Winkeländerung aufgrund einer Schubspannung τ)

Die verschiedenen Einflüsse können aus der Lage der Körperpunkte vor bzw. nach der Deformation bestimmt werden. Wie das in der linearisierten Elastizitätstheorie[1] gehandhabt wird, erklären die folgenden Unterkapitel. Die Verschiebungen der Körperpunkte in die Richtungen der Koordinatenachsen x, y, z werden dabei meist mit den leichter lesbaren Buchstaben u, v, w (z.B. in [Berger 1994]) aber auch mit ξ, η, ζ (wie etwa in [Cremer und Heckl 1995]) bezeichnet, was demgegenüber eine Verwechslung mit der Schnelle v ausschließt.

Längenänderungen durch Normalspannungen

Die Längenänderung eines Körpers wird durch Normalspannungen verursacht. Im Allgemeinen sind die Spannungen und damit auch die Längenänderungen von der laufenden Koordinate (z.B. x) abhängig. Dieser Zusammenhang kann von einem nicht-konstanten Querschnittsverlauf $A = A(x)$ oder einer veränderlichen Normalkraft $N = N(x)$ herrühren.
Um die grundlegenden Sachverhalte zu verdeutlichen, betrachten wir einen konischen Stab, der durch eine Normalkraft belastet wird (siehe Abb. 3.11). Bei dem auf Zug beanspruchten Stab erfährt jeder Stabquerschnitt eine Verschiebung in x-Richtung. Die hintereinander liegenden Stabelemente verlängern sich dabei, die Gesamt-Längenänderung ist die Summe aller Elemente-Verlängerungen. Bezieht man die Längenänderung auf die ursprüngliche Länge, so erhält man die (dimensionslose) **Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$**. Die *örtliche Dehnung* an der Stelle x ergibt sich durch Grenzwertbildung, wenn man Δx des betrachteten Elementes gegen Null gehen lässt:

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \tag{3.9}$$

Die Verschiebung an einer Stelle x_1 findet man durch Integration aus

[1] Eine sehr gelungene, detaillierte Einführung bietet das Werk [Rieg und Hackenschmidt 2000], S. 24 ff. Eine etwas knappere Darstellung, der wir folgen wollen, findet sich in [Berger 1994], S. 30 ff.

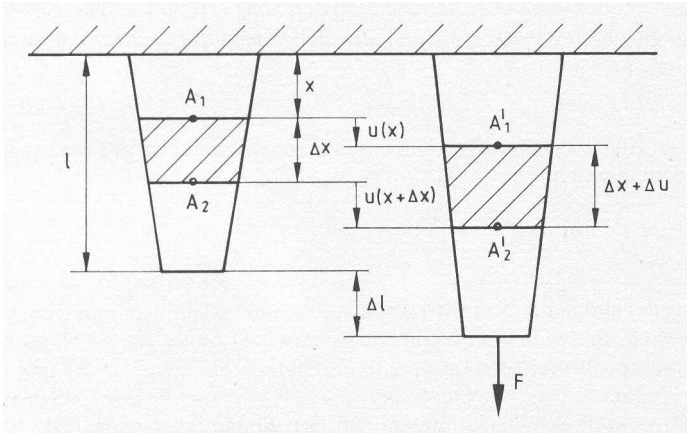


Abbildung 3.11: Längenänderungen eines konischen Stabes durch Normalspannungen

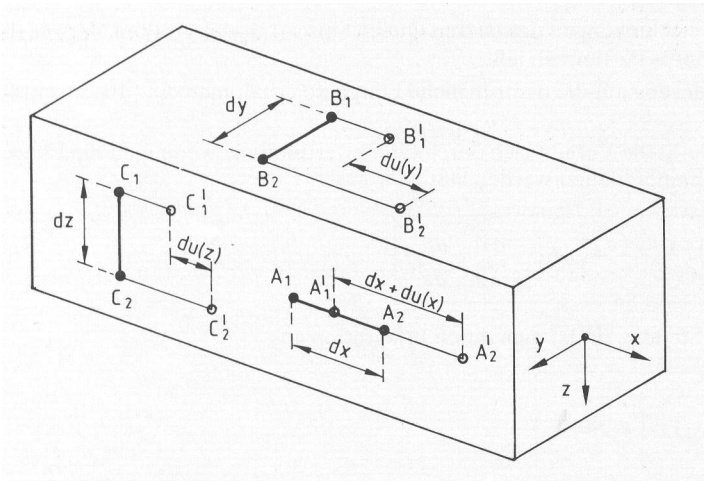


Abbildung 3.12: Längenänderungen durch Normalspannungen

$$du = \varepsilon_{xx}\, dx \Rightarrow u(x_1) = \int_0^{x_1} \varepsilon_{xx}\, dx$$

Längenänderungen, allgemeiner Verformungszustand
Sind die Spannungen und die entsprechenden Verformungen an einem Körper unregelmäßig (siehe Abb. 3.12), ist die Verschiebung (Abstandsänderung) von allen Raumrichtungen abhängig, d.h. $u = u(x, y, z)$.
Entwickelt man die Funktion der Verschiebung in eine Taylorreihe und bricht wieder nach dem ersten Korrekturglied ab (Linearisierung!), so lässt sich schreiben:

$$u(x + dx, y + dy, z + dz) = u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz \tag{3.10}$$

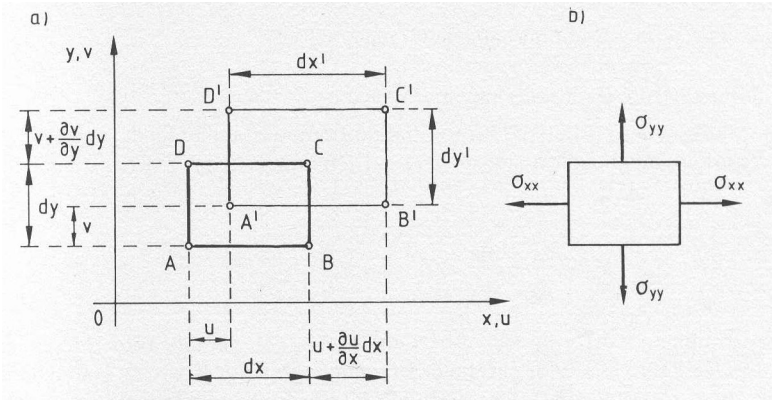


Abbildung 3.13: Längenänderungen am rechteckigen Flächenelement

Im Allgemeinen (der 2D-Fall ist in Abb. 3.13 dargestellt) ergeben sich die Dehnungen in Richtung der Koordinatenachsen zu:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\,dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.11a}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}\,dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.11b}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\,dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.11c}$$

Winkeländerungen durch Schubspannungen

Im isotropen Material wird durch reinen Schub eine reine Winkeländerung erzeugt. Ein elementares Rechteck verformt sich daher gemäß Abb. 3.14 zu einem Parallelogramm, wobei die Seitenlängen gleich bleiben.
Durch die Wirkung der Schubspannungen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ändern sich die rechten Winkel des Flächenelements um den Gleitwinkel (kurz: die Gleitung, oder auch: Schubwinkel). Die **Gleitung $\boldsymbol{\gamma}$** setzt sich aus zwei Anteilen zusammen und lässt sich auch durch die Verschiebungen ausdrücken. So z.B. für den Gleitwinkel in der x, y-Ebene:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \tan\gamma_1 + \tan\gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\,dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\,dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Hierbei wurde schon wieder linearisiert! Ebenso lassen sich die Gleitwinkel in der y, z- bzw. x, z-Ebene finden. Insgesamt gilt dann (siehe auch Abb. 3.15):

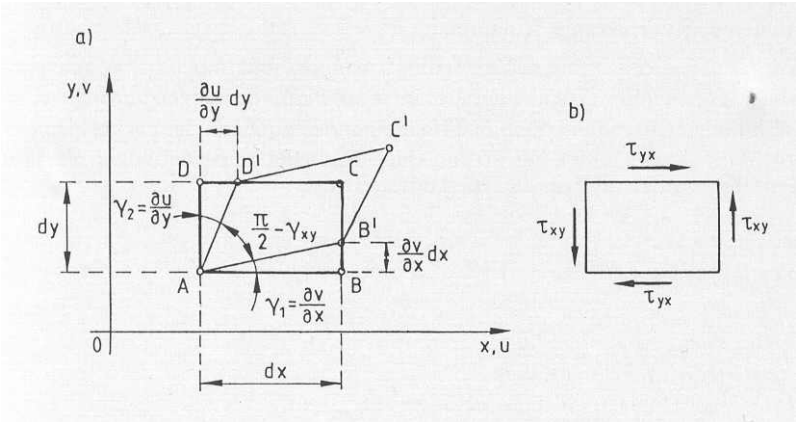


Abbildung 3.14: Winkeländerung am rechteckigen Flächenelement

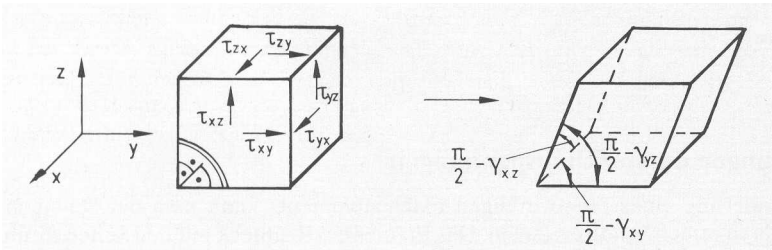


Abbildung 3.15: Winkeländerung durch Schubspannungen

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.12a}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{3.12b}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.12c}$$

Längen- und Winkelverformungen

„Verschieben sich alle Körperpunkte um die gleichen Strecken u, v, w in x, y, z-Richtung, so bewegt sich der Körper im ganzen translatorisch. Dreht sich der Körper insgesamt längs eines Winkels um eine Achse, dann bewegt er sich rotatorisch. Eine Verformung entsteht erst, wenn sich die einzelnen Körperpunkte (noch zusätzlich) gegeneinander verschieben. Dann verändern sich die Kantenlängen und/oder die Winkel der einzelnen Körperelemente“ ([Berger 1994], S. 35).
Im Allgemeinen treten also Dehnungen und Gleitungen neben der translatorischen und rotatorischen Bewegung der Körperelemente auf. Nun wird wieder im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie linearisiert:

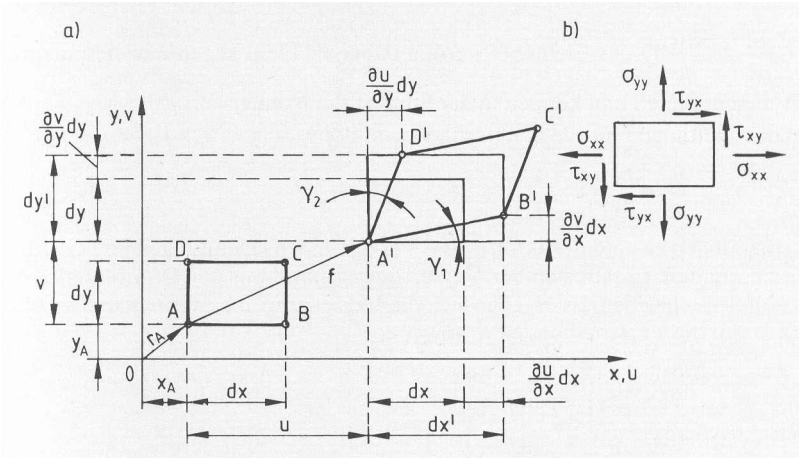


Abbildung 3.16: Längen- und Winkelverformungen im 2D-Fall

- Für kleine Winkeländerungen wird die Schrägstellung der Elementkante vernachlässigt und werden die verformten Längen durch ihre Projektionen auf die entsprechenden Achsen ersetzt
- Für kleine Verschiebungen werden wieder die Winkel durch ihren Tangens ersetzt
- Terme höherer Ordnung bzw. deren Quadrate werden wegen ihrer physikalischen Kleinheit vernachlässigt und weggelassen

So erhält man für die Dehnungen und Gleitungen dieselben Ausdrücke wie in den Gleichungen 3.11 und 3.12!
Man kann die allgemeinen linearisierten Zusammenhänge zwischen Verschiebungen und Verzerrungen in Matrixform anschreiben (siehe [Berger 1994], S. 36):

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}}_{\vec{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\vec{f}}} \tag{3.13}$$

bzw.

$$\vec{\varepsilon} = [D] \cdot \vec{f} \tag{3.14}$$

mit

$\vec{\varepsilon}$... Vektor der Verzerrungen (Dehnungen und Gleitungen)

$\vec{f}$... Vektor der Verschiebungen

$[D]$... Differentialoperator-Matrix mit den Verschiebungs/Verzerrungs-Beziehungen

3.2.3 Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformung

Formänderung durch einachsige Normalspannung

Zwischen Spannungen und Verformungen bestehen Zusammenhänge, die experimentell im Zugversuch bestimmt werden können. Wird ein Körper durch eine einachsige Normalspannung belastet, kann bis zu einer bestimmten Grenze, der Proportionalitätsgrenze, in guter Näherung ein linearer Zusammenhang zwischen Normalspannung und Dehnung angenommen werden:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3.15}$$

Dieser Zusammenhang entspricht dem Hookschen Gesetz. Der Proportionalitätsfaktor

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

wird **Elastizitätsmodul** oder auch Youngscher Modul genannt. In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Beziehungen zwischen Verschiebung und Verzerrung diskutiert und dabei geometrisch linearisiert. Hier wird ebenfalls linearisiert, aber diesmal der physikalische Zusammenhang.

Bei der mechanischen Beanspruchung eines Körpers durch Normalspannungen tritt neben der Längenänderung auch gleichzeitig eine Querverformung auf. Im elastischen Bereich ist die negative Querdehnung ($-\varepsilon_q$) proportional der Längsdehnung (ε_l). Man definiert das Verhältnis der Dehnungen als **Querkontraktionszahl $\boldsymbol{\mu}$** oder $\boldsymbol{\nu}$ (auch Querdehnzahl, Querdehnungsbeiwert oder Poissonsche Zahl genannt):

$$\mu = \nu = \frac{-\varepsilon_q}{\varepsilon_l} \tag{3.16}$$

Formänderung durch Schubspannungen

Wird eine Rechteckscheibe nur durch Schubspannungen $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ belastet, so verschieben sich die Kanten in Richtung der Schubspannungen, wodurch sich die ursprünglich rechten Winkel der Scheibe verändern (siehe Abb. 3.17). Die Änderung des ursprünglich rechten Winkels ist den aufgebrachten Schubspannungen proportional, $\tau = G \cdot \gamma$. Daraus folgt:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \tag{3.17}$$

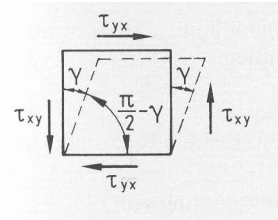


Abbildung 3.17: Formänderung durch Schubspannungen, 2D-Fall

Das ist das Hooksche Gesetz für Schubbeanspruchung. Der Proportionalitätsfaktor G heißt Gleit- oder **Schubmodul**.
Für isotrope, linear-elastische Werkstoffe sind die drei Größen Elastizitätsmodul E, Schubmodul (=Gleitmodul) G und Querkontraktionszahl μ nicht unabhängig, sondern über folgende Formel miteinander verknüpft:

$$\boxed{G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}} \tag{3.18}$$

Es sind also nur 2 unabhängige Materialkonstanten vorhanden! (Zur Herleitung dieser Formel siehe z. B. [Berger 1994], S. 126 f.)

Setzt man bei *Fluiden* (Gasen und Flüssigkeiten) vereinfachend voraus, dass keine Reibung unter den Teilchen herrscht, können die Volumenelemente sich gegeneinander tranversal verschieben, ohne dass eine rückstellende Kraft wirksam wird. Daher können keine Schubspannungen zwischen den Volumenelementen auftreten: Es gibt keine elastische Rückstellkraft und auch keine Reibungskräfte, die der Geschwindigkeit proportional sind, mit der sich die Volumenelemente gegeneinander verschieben. Wegen der daher fehlenden Querdehnbeiwerte kann man die Spannungen gleichsetzen. Da die Normalspannungen als positiv in Richtung der äußeren Flächennormale definiert wurden, man aber einen Druck auf das Volumenelement als positiv annimmt, wenn er das Volumen verkleinern will, führt man den Druck als negative Normalspannung ein:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \tag{3.19}$$

Formänderung beim allgemeinen Spannungszustand

Zur Untersuchung des allgemeinen räumlichen Spannungszustandes denkt man sich wieder an einer beliebigen Stelle des betrachteten Körpers ein Volumenelement in Form eines Quaders herausgeschnitten. Im Allgemeinen wirken in jeder Schnittfläche des Quaderelementes 3 Spannungskomponenten, die von der Schnittrichtung abhängig sind. Dreht man die Schnittflächen, so erhält man in jeder Lage andere Spannungen. Insbesondere gibt es eine Quaderstellung, bei der die Schubspannungen am

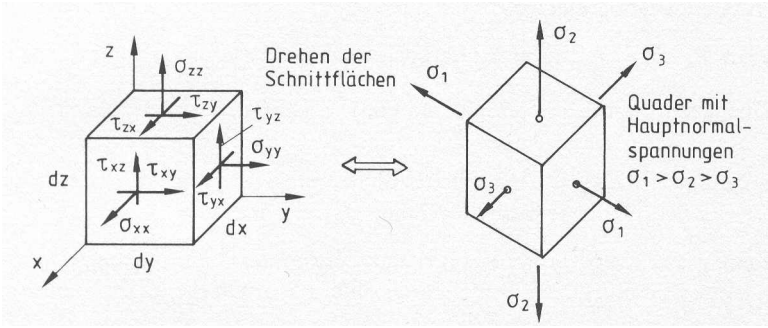


Abbildung 3.18: Allgemeiner Spannungszustand

gesamten Element verschwinden und die Normalspannungen extreme Werte annehmen. Dann wirken nur noch die so genannten Hauptnormal-Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, in deren Richtungen die Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ entstehen (siehe Abb. 3.18).
Bei *isotropen, linear-elastischen* Werkstoffen haben die Schubspannungen auf die Dehnungen keinen Einfluss, wie auch die Normalspannungen auf die Gleitungen ohne Einfluss sind. Normalspannungen erzeugen keine Gleitungen und Schubspannungen keine Dehnungen, so dass *beide Spannungsarten für sich betrachtet und überlagert* werden können.

Längenänderungen durch Normalspannungen
Wird ein isotroper Körper in drei zueinander senkrechten Richtungen auf Zug belastet, dann kann man die Gesamtdehnung, z. B. in x-Richtung, durch Überlagerung der Einzeldehnungen erhalten.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{x1} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} && \cdots \text{ Längsdehnung} \\ \varepsilon_{x2} &= -\mu\,\frac{\sigma_{yy}}{E} && \cdots \text{ Querdehnung} \\ \varepsilon_{x3} &= -\mu\,\frac{\sigma_{zz}}{E} && \cdots \text{ Querdehnung} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Superposition} \\ &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3} \\ &\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu\frac{\sigma_{yy}}{E} - \mu\frac{\sigma_{zz}}{E} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Die Dehnungen in den anderen beiden Richtungen erhält man analog dazu bzw. durch zyklische Vertauschung der Indizes:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\cdot[\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\cdot[\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\cdot[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned}} \tag{3.21}$$

Sonderfall ebener Spannungszustand: Setzt man in den Gleichungen des dreiachsigen Spannungszustand $\sigma_3 = 0$ bzw. $\sigma_{zz} = 0$, so ergeben sich die Dehnungen des zweiachsigen (ebenen) Spannungszustands!

Winkeländerungen durch Schubspannungen
Nach dem Hookschen Gesetzt der Schubbeanspruchung erhält man die Gleichungen in den einzelnen Ebenen ([Berger 1994], S. 70):

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}} \tag{3.22}$$

Sonderfall ebener Spannungszustand: Da beim ebenen Spannungszustand neben σ_{zz} auch $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ist, ergeben sich die Gleitungen durch Nullsetzen dieser Terme in Gleichung 3.22!

Volumendehnung (kubische Dilatation)
Wiederum am Quaderelement lässt sich zeigen, dass bei Vernachlässigung von Dehnungsprodukten, die klein von höherer Ordnung[2] sind, die Volumendehnung (relative Volumenänderung, auch „kubische Dilatation“ genannt) gleich der Divergenz des Verschiebungsvektors $\vec{f}$ ist:

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{f} \tag{3.23}$$

Mit den Beziehungen aus Gleichung 3.21 lässt sich eine Beziehung zwischen Volumendehnung und Spannungen herstellen (Addition der 3 Dehnungsgleichungen):

$$\varepsilon_V = 3(1 - 2\mu)\frac{\sigma_m}{E} \tag{3.24}$$

Wobei σ_m der Spannungs-Mittelwert ist. Der allseitig gleiche Spannungszustand wird „hydrostatischer Spannungszustand“ genannt. Für ihn gilt:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_m \tag{3.25}$$

3.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die grundlegenden Erkenntnisse der linearisierten Elastizitätstheorie bzw. der Festigkeitslehre kennengelernt.
Wir haben gesehen, dass äußere Kräfte den Körper (die Körperpunkte) in Spannung versetzen und dadurch deformieren (d. h. verschieben und verzerren). Dabei verursachen Normalspannungen der Körperelemente Längenänderungen (Dehnungen) und Schubspannungen Winkeländerungen (Gleitungen). Der Zusammenhang zwischen

[2] Mit „klein von höherer Ordnung“ ist gemeint, dass Produkte von kleinen Größen (z. B. von Differentialen) noch viel kleiner sind als diese Größen selbst und daher oft vernachlässigt werden können, oder bei Grenzübergängen wegfallen.

Normalspannungen und Dehnungen wurde in Gleichung 3.21 angegeben und der Zusammenhang zwischen Schubspannungen und Gleitungen in Gleichung 3.22.
Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen der Körperpunkte und den Verzerrungen (Dehnungen bzw. Gleitungen) ist in Gleichung 3.13 enthalten.

Nun haben wir die Grundlagen der Festigkeitslehre aufgearbeitet. Im nächsten Kapitel wollen wir uns kurz mit den Grundlagen von Wellenerscheinungen in Festkörpern und Fluiden beschäftigen.

Kapitel 4

Wellenerscheinungen

In diesem Abschnitt wollen wir erklären, was für verschiedene Wellenbewegungen in Festkörpern einerseits und in Fluiden (d. h. Flüssigkeiten und Gasen) andererseits möglich sind und wie Biegewellen gegenüber anderen Wellenerscheinungen einzuordnen sind. Außerdem wollen wir die akustischen Feldgleichungen für Luft angeben (Kapitel 4.2). Auf diese Gleichungen werden wir in Kapitel 5 zurückgreifen, in dem wir die Methode beschreiben werden, mit der in dieser Arbeit die Abstrahlung von ebenen Strahlern berechnet wird.

4.1 Wellen in Festkörpern

Zwischen *starren Körpern* können Schwingungen auftreten, wenn diese Körper elastisch (über Federn) miteinander verbunden sind. Es entstehen dann Differentialgleichungen (DGL) bzw. Systeme von Differentialgleichungen, die die Schwingungen dieses mechanischen Systems beschreiben - die Eigenwerte der DGL liefern die Eigenfrequenzen des Systems. Bei diesen Bewegungen werden kinetische und potentielle Energie gespeichert und wechselweise ineinander umgewandelt.

In *festen Körpern* kann es zu Wellenerscheinungen kommen, weil die *infinitesimalen* Elemente miteinander so verbunden sind, dass die beschreibenden Feldgrößen verkoppelt werden. Ist dabei die örtliche Ableitung einer Feldgröße der zeitlichen einer anderen proportional und umgekehrt, so kann ein Zyklus entstehen. Man kann dann durch Differentiation der einen Gleichung nach dem Ort, der anderen nach der Zeit und durch Vertauschung der Differentiationsreihenfolge (dies ist erlaubt, da Orts- und Zeitabhängigkeit unabhängig voneinander sind) die eine oder die andere Feldgröße eliminieren. Sind nur 2 Feldgrößen verkoppelt, erhält man dabei für den dämpfungsfreien Fall die einfache Wellengleichung, ansonsten auch Differentialgleichungen höherer Ordnung - wie etwa im Fall der Biegewellen.

In [Cremer und Heckl 1995], S. 115 ff., werden die allgemeinen Feldgleichungen (Grundgleichungen des isotropen, elastischen Kontinuums) hergeleitet. Das Ergebnis

([Cremer und Heckl 1995], S. 119 oder [Heckl und Müller 1995], S. 13) sei hier der Vollständigkeit halber angeführt:

$$G\left\{\Delta\vec{v} + \frac{1}{1-2\mu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right\} = \rho\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

bzw. mit den Schnellekoordinaten $v_1 = \partial\xi/\partial t; v_2 = \partial\eta/\partial t; v_3 = \partial\zeta/\partial t$

$$\Delta v_i + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}; \qquad i = 1,2,3 \tag{4.2}$$

In Gleichung 4.2 gilt die Summationskonvention, d. h. über gleiche Indizes - hier k ist zu summieren.

Durch Aufspaltung in einen quellfreien und einen wirbelfreien Teil kann gezeigt werden, dass im homogenen, festen Medium prinzipiell nur 2 Arten von Wellen als ebene Wellen möglich sind:

1. die reine longitudinale Welle
2. die reine transversale Welle

Bei den reinen **Longitudinalwellen** bewegen sich die Materieteilchen in Richtung der Wellenausbreitung. Bei reinen **Transversalwellen** erfolgt die Bewegung normal zur Ausbreitungsrichtung, es ergibt sich eine Formänderung (Schubdeformation durch Schubspannungen), aber keine lokale Volumenänderung. Die reinen Longitudinal- oder Transversalwellen können in Medien vorkommen, deren Ausdehnung gross im Vergleich zur Wellenlänge ist. Alle **anderen Wellentypen** können als Superposition dieser beiden Grundarten durch Reflexion der Wellen an Grenzflächen erklärt werden. Wegen der praktischen Bedeutung einiger Wellentypen macht es aber trotzdem Sinn, auch ihnen eigene Bezeichnungen zu geben (siehe auch [Zollner und Zwicker 1998], S. 119 ff.):

- **Dehnungswellen** in Stäben, bei denen abwechselnd Verdünnungen und Verdickungen den Stab entlanglaufen (=Schnürwellen)
- **Torsionswellen**, die sich aus der Verdrillung(Torsion) bei Stäben ergeben
- **Rayleighwellen**, das sind Oberflächenwellen, deren Amplitude zum Inneren des Körpers exponentiell abnimmt (kommt bei Erdbeben vor)
- **Biegewellen** auf Stäben und Platten. Im Gegensatz zu reinen Transversalwellen bilden die Wellennormalen (Wellenfronten) keine parallelen Ebenen. Der einzige Wellentyp, für den die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzabhängig ist.

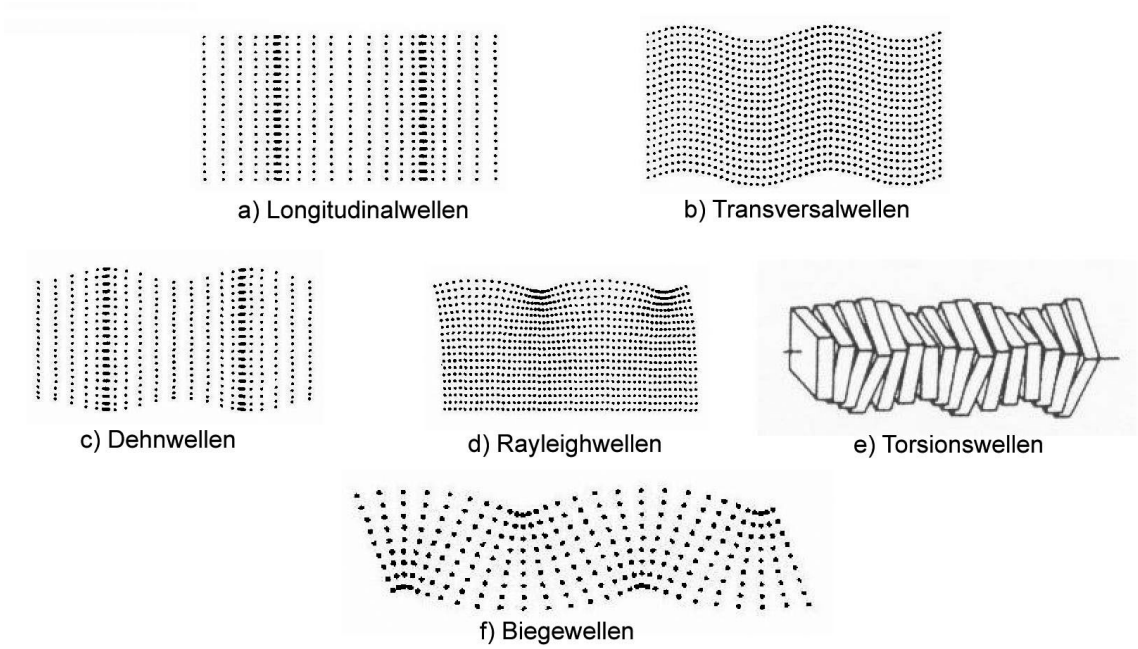


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der wichtigsten Wellenarten

In der Abbildung 4.1 sind die wichtigsten Wellentypen schematisch dargestellt.

Im Übrigen lassen sich auch aus den allgemeinen Feldgleichungen 4.1 bzw. 4.2, denen ja alle elastischen Schwingungen eines homogenen festen Körpers genügen müssen, die Bewegungsgleichungen für dünne Platten herleiten, wie in [Cremer und Heckl 1995] auf S. 137 ff. gezeigt wird (Biegewellen in ebenen, isotropen Platten: S. 151).

4.2 Wellen in Fluiden

Wie im Fall der festen Körper können auch für das reibungsbehaftete (viskose) Fluid, also Gas oder Flüssigkeit, allgemeine Feldgleichungen hergeleitet werden. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen werden in der allgemeinsten Form die *Navier-Stokes-Gleichungen* genannt. Sie sind nichtlinear und daher schwer zu lösen. Eine recht detaillierte Ableitung dieser Gleichungen ist in [Ziomek 1995] enthalten. Die Navier-Stokes-Gleichungen sind die Grundlage der Strömungslehre, aber auch der Akustik, denn sie können linearisiert und vereinfacht werden: Vernachlässigt man in ihnen den konvektiven Teil der Beschleunigung sowie die viskose Reibung und linearisiert man das Gasgesetz, ergeben sich die klassischen Feldgleichungen der reibungsfreien akustischen Fluide (und damit auch in erster Näherung die der Luft). In *reibungsfreien Fluiden* können sich aufgrund der Verschieblichkeit der Moleküle untereinander nur Wellen ausbreiten, die mit einer Volumsänderung (durch Normalspannungen) verbunden sind. Dies trifft nur auf die Longitudinalwelle zu.

Dem Skriptum [Weselak und Graber 2001] folgend sollen die dynamischen Grund-

gleichungen der Akustik (die Feldgleichungen) angeschrieben werden[1], denn wir werden sie später noch benötigen.

Differentielle Form der Adiabatengleichung (Materialgesetz):

$$dp = c^2 \cdot d\rho \tag{4.3}$$

Vektorielle Form der Adiabatengleichung:

$$\operatorname{grad} p = c^2 \operatorname{grad} \rho \tag{4.4}$$

Differentielle Form der Eulerschen Bewegungsgleichung (Bewegungsgesetz):

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} \qquad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t} \qquad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} \tag{4.5}$$

Vektorielle Form der Eulerschen Bewegungsgleichung:

$$-\operatorname{grad} p = \rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \tag{4.6}$$

Vektorielle Form der Kontinuitätsgleichung (Masseerhaltung):

$$-\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.7}$$

Aus den Feldgleichungen 4.3 bis 4.7 lassen sich Wellengleichungen herleiten für: die Dichte, den Druck, die Schallschnelle und das Geschwindigkeitspotential. Stellvertretend für alle Varianten sei hier die Wellengleichung für den Druck angeschrieben:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta p \tag{4.8}$$

mit

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \ldots \text{Laplace-Operator}$$

[1] Die klassischen Herleitungen der Feldgleichungen der Luft sind in fast jedem Buch zum Thema Akustik zu finden, etwa in folgenden Werken des Literaturverzeichnisses:

- [Cremer und Huber 1990] (S. 107 ff., etwas langwierig),
- [Cremer und Müller 1976] (S. 1 ff.),
- [Weselak und Graber 2001] (S. 9 ff., sehr kompakt und übersichtlich),
- [Zollner und Zwicker 1998] (S. 49 ff., recht kurz),
- [Kollmann 1993] (S. 44, hier ist auch ein wenig der kontinuumsmechanische Ansatz zu sehen),
- [Waubke 2003].

Das Geschwindigkeitspotential ist jedoch in der Literatur besonders beliebt, da sich aus ihm leicht Ausdrücke für den Druck und die Schnelle bilden lassen und weiters die Einbringung von Dirichletschen und Neumannschen Randbedingungen einfach ist. Betrachtet man die Wellengleichung für das Geschwindigkeitspotential ψ (Gleichung 4.9) nur für eine einzelne Frequenz ω und geht auf komplexe Schreibweise über (Zeigerschreibweise), so ergibt sich die Helmholtz-Gleichung, die ebenfalls oft in der Literatur zu finden ist:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta \psi \tag{4.9}$$

Mit $\underline{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j\omega t}$ und der Substitution $k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$ ergibt sich daraus:

$$\nabla^2 \underline{\psi} + k^2 \underline{\psi} = 0 \tag{4.10}$$

Druck und Schnelle ergeben sich aus dem Geschwindigkeitspotential zu

$$p = j\omega\rho \cdot \underline{\psi}$$

$$\vec{v} = -\nabla \cdot \underline{\psi} \qquad \text{(per definitionem)}$$

Formal entspricht das Übergehen auf die Zeigerschreibweise der Fourier-Transformation der Gleichung in der Zeit. Bei Beschränkung auf einen einzelnen harmonischen Vorgang und komplexer Schreibweise (Übergang auf komplexe Zeiger) spart man sich de facto die Transformation, denn diese besteht dann einfach im Weglassen oder Hinzufügen des Faktors $e^{-j\omega t}$. Transformieren wir z. B. die Wellengleichung für den Druck (siehe auch [Heckl und Müller 1995], S. 11), ergibt sich:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \qquad \ldots \qquad \text{Fourier-Transformation} \tag{4.11}$$

$$\Delta P(\omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot P(\omega) = 0 \tag{4.12}$$

Weiters ist es für viele Probleme, insbesondere für die Berechnung von Abstrahl- und Streuproblemen, oft günstig, die Gleichung 4.12 mit Hilfe des Greenschen Satzes in eine Integralgleichung umzuformen. Das hat nach [Heckl und Müller 1995], S. 11, den Vorteil, dass der Einfluss von Randbedingungen besser zum Ausdruck kommt:

$$P(x, y, z, \omega) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(j\omega\rho\, V_s(\omega) \frac{e^{-j\omega r/c}}{r} + P_s(\omega) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-j\omega r/c}}{r} \right) dS \tag{4.13}$$

Ist der komplexe Frequenzgang bekannt, kann in jedem Fall der Zeitverlauf durch Fourier-Rücktransformation gewonnen werden:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega \qquad \ldots \qquad \text{Fourier-Rücktransformation} \tag{4.14}$$

Nun haben wir uns auch mit den Grundlagen von Wellenerscheinungen in Festkörpern und Fluiden beschäftigt. Als nächstes wollen wir uns mit dem Übergang zwischen den beiden Medien auseinandersetzen - im nächsten Kapitel werden wir eine Methode zur Berechnung der Schallabstrahlung vom ebenen Strahler kennenlernen.

Kapitel 5

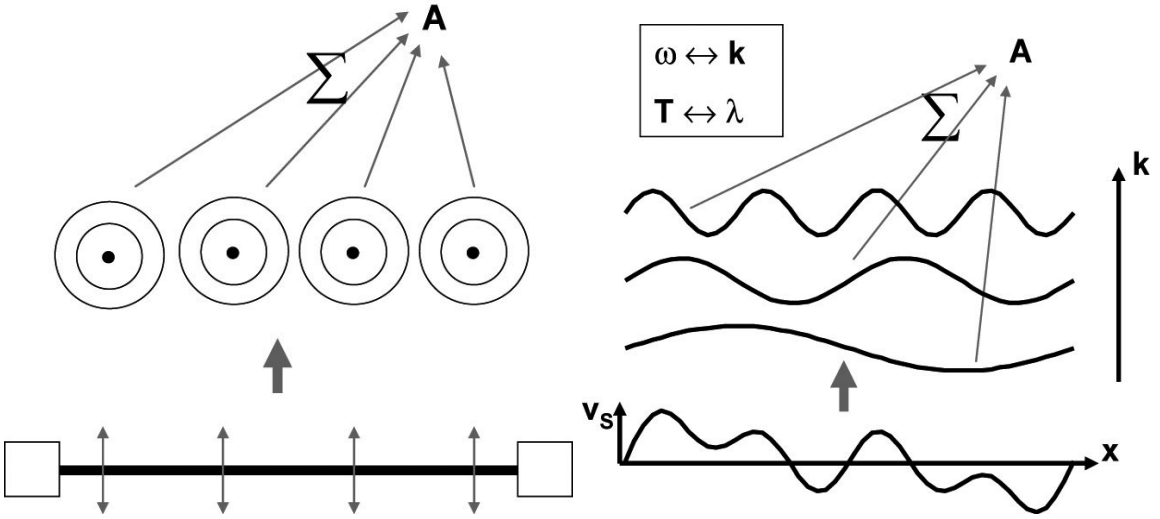
Schallabstrahlung

In diesem Abschnitt wollen wir die Methode erklären, die wir im Weiteren benutzen werden, um die Schallabstrahlung von ebenen Strahlern zu berechnen. Nach einer kurzen Einleitung (Kapitel 5.1) wenden wir uns dem Problem des ebenen Strahlers zu, bei dem die Strahlerschnelle in einer Ebene vorgegeben ist. Zunächst (Kapitel 5.2) diskutieren wir den einfachen Fall, bei dem die Bewegung des ebenen Strahlers selbst eine einzelne ebene Welle ist, die sich entlang einer Koordinatenachse ausbreitet. Dann (Kapitel 5.3) werden wir die Diskussion auf den Fall einer harmonischen Wellenbewegung in beliebiger Richtung auf dem ebenen Strahler erweitern, um in weiterer Folge die Abstrahlung einer beliebige Strahlerbewegung durch Zerlegung in harmonische Wellen zu beschreiben.
Am Schluss (Kapitel 5.4) zeigen wir noch eine Methode, mit der es möglich ist, bei einer unendlichen Platte die Abstrahlung auf Grund einer Anregung zu berechnen, ohne dass die Strahlerschnelle explizit bekannt ist. Dies gelingt unter Benutzung der Wellenimpedanz und der Strahlungsimpedanz der unendlichen Platte. Die Strahlungsimpedanz der unendlichen Platte wird ebenfalls in Kapitel 5.3 hergeleitet. Die Wellenimpedanz der unendlichen Platte werden wir dann später in Kapitel 7.4 herleiten, nachdem wir in Kapitel 6 die Kirchhoff'sche Plattengleichung aufgestellt haben.

5.1 Einleitung

Für die Schallabstrahlung von Festkörpern sind in erster Linie Biegewellen und Schubwellen verantwortlich. Die Oberflächenwellen, die sich nur in weit ausgedehnten Körpern ausbreiten (zum Beispiel Erdbebenwellen), können für die Betrachtung der Schallabstrahlung außer Acht gelassen werden. Abhandlungen des Abstrahlproblems sind in [Möser 1988], Kapitel 1.2 (S. 3 ff.), und [Cremer und Heckl 1995], Kapitel 6, enthalten. An diese ist auch die nachfolgende Beschreibung angelehnt.

Bei der Berechnung der Schallabstrahlung einer Kolbenmembran wird erfolgreich das Huygenssche Prinzip angewandt und die konphas bewegte Membran als eine Verteilung infinitesimaler Punktstrahler (Elementarstrahler nullter Ordnung, unge-



(a) Berechnung nach Rayleigh (Zerlegung in Punktstrahler)

(b) Berechnung über das Wellenzahlspektrum (Zerlegung in Wellen)

Abbildung 5.1: Methoden zur Berechnung der Schallabstrahlung von ebenen Schallwandlern

richteter Kugelstrahler, Monopolquellen) behandelt (siehe Abb. 5.1(a)). Über die Fläche der Membran wird dann integriert bzw. werden die Anteile der Elementarstrahler durch Superposition überlagert. Diese Vorgehensweise ist spätestens seit Lord Rayleigh hinreichend bekannt und prinzipiell immer möglich. Trotzdem ist sie beim Manger-Schallwandler nicht zielführend, da die Punkte der Membran zu einem speziellen Zeitpunkt unterschiedliche Phasen haben und die Integration analytisch nicht mehr oder nur sehr schwer durchführbar ist. Für ebene Strahler gibt es noch eine andere Methode, um die Schallabstrahlung zu berechnen. Bei dieser Methode wird die Strahlerschnelle durch Fourier-Transformation in ebene Wellen zerlegt (Wellenzahlspektrum). Die Beiträge der einzelnen ebenen Wellen zum Schallfeld in der Luft werden dann wiederum für den Aufpunkt summiert bzw. integriert (siehe Abb. 5.1(b)). Wir werden daher im weiteren das Konzept des Wellenzahlspektrums und mit ihm die Anwendung der Fourier-Transformation in der modernen theoretischen Akustik kennenlernen, die uns ein gutes Werkzeug sein wird, um die Schallabstrahlung auch bei nicht-konphaser Bewegung des ebenen Stahlers recht elegant analytisch zu berechnen.

Kennt man die Bewegungsgleichung der Platte (wir werden sie in Kapitel 6.2 herleiten), so kann man die Abstrahlung als klassisches Randwertproblem behandeln: Man gibt die Schallschnelle in der Luft (dort gilt die Wellengleichung) entlang einer Ebene vor. Die Schallschnelle ergibt sich aus der Euler-Gleichung (Gleichung 4.6 auf Seite 38). Zweckmäßigerweise gehen wir aber auf die komplexe Zeigerschreibweise über. Die Randwertaufgabe lautet dann:

1. Der Schalldruck muss die Wellengleichung erfüllen.

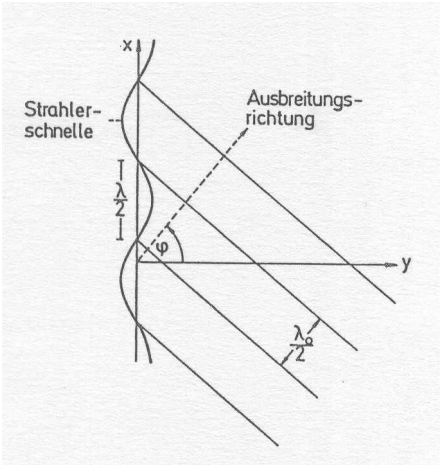


Abbildung 5.2: Schallabstrahlung vom ebenen Stahler, 1D-Fall (aus [Möser 1988], S. 6)

2. Die Schnelle $\vec{v} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \cdot \operatorname{grad} \underline{p}$ muss der Randwertvorgabe $v(x, y, z = 0) = v_S(x, y)$ genügen, das heißt die Schallschnelle in der Luft (v) an der Oberfläche des Strahlers muss gleich der Strahlerschnelle (v_S) sein.

Dabei ist z die Normale zur Plattenoberfläche und gleichzeitig die Richtung der Auslenkung. Auf der Fläche selbst können sich Wellen in x- und y-Richtung ausbreiten. Die gesamte Schwingungsform des ebenen Strahlers bzw. der Platte wird dann als Superposition ebener Wellen aufgefasst bzw. durch Fourier-Transformation in harmonische Anteile mit bestimmter Wellenzahl zerlegt (man spricht vom Wellenzahlspektrum, siehe auch Anhang E auf Seite 145). Wir suchen also die Lösung des Abstrahlproblems für die ebene Welle und gewinnen die Gesamtlösung durch Superposition.

5.2 Eindimensionale Wellenausbreitung

Besonders einfach zu verstehen ist die Methode im Fall der eindimensionalen Wellenausbreitung einer reinen harmonischen Welle (siehe Abb. 5.2). Mit „eindimensional“ meinen wir hier eigentlich nur, dass eine ebene, transversale Welle sich auf einer unendlich ausgedehnten Ebene entlang *einer* Koordinatenrichtung ausbreitet. Die Ergebnisse lassen sich dann leicht auch auf den zweidimensionalen Fall und beliebige Strahlerbewegung erweitern (siehe Kapitel 5.3 auf Seite 50).
Abweichend von dem in der Einleitung Gesagten, betrachten wir aus Bequemlichkeit nun folgenden Fall: Die transversale Welle pflanzt sich in der x, z-Ebene in x-Richtung fort, es ist daher $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Die y-Richtung ist also jetzt die Normalrichtung dieser Ebene (siehe Abbildung 5.2). Diese Konfiguration verwenden wir aber nur zur Erklärung im „eindimensionalen“ Fall, da dann, wie meist üblich, die x, y-Ebene betrachtet wird.

Durch die Bewegung der Platte werden im umgebenden Medium (Fluid) Schallwellen erzeugt. In unserem Fall ist das umgebende Medium *Luft*. Betrachten wir nur einen harmonischen Vorgang einer bestimmten Frequenz, gilt in Luft die Helmholtz-Gleichung 4.12 auf Seite 39 aus Kapitel 4:

$$\Delta \underline{p} + k_0^2 \, \underline{p} = 0 \qquad \text{mit} \qquad k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \tag{5.1}$$

Weil wir nur an der Lösung der Schall*abstrahlung* interessiert sind, benutzen wir folgenden Lösungsansatz:

$$\underline{p}(x, y) = \underline{p}_0 \, e^{-jk_x x} \, e^{-jk_y y} \tag{5.2}$$

> Anmerkung: Da bei der Abstrahlung alle Wellenanteile von der strahlenden Fläche wegeilen müssen, darf kein exponentieller Anteil ($-jk_x x$ bzw. $-jk_y y$) mit wachsender Entfernung x bzw. y immer größere Werte annehmen. Das kommt daher, dass wir beim Übergang auf die Zeigerschreibweise (bzw. bei Fourier-Transformation der Wellengleichung in der Zeit) den komplexen Ansatz $e^{j\omega t}$ für die Beschreibung von harmonischen Vorgängen verwendet haben. Zusammen mit der Annahme der Kausalität (die Zeit t wächst immer) und der Verwendung von positiven Frequenzen und positiven Wellenzahlen ergeben sich nur für negative Vorzeichen in den Exponenten bei den Wellenzahlen ausstrahlende Wellen: Ein Punkt konstanter Phase bewegt sich dann in positiver Koordinatenrichtung x bzw. y! Das ist der Grund, warum wir im Ansatz, Gleichung 5.2, negative Vorzeichen im Exponenten gewählt haben.
> Hätten wir beim Übergang auf die Zeigerschreibweise entgegen der üblichen Konvention den Ansatz $e^{-j\omega t}$ gewählt, oder hätten wir uns für positive Exponenten $jk_x x$ bzw. $jk_y y$ entschieden, so würde der dadurch entstehende Ansatz einlaufenden, d. h. auf die Strahlerfläche zulaufenden, Wellen entsprechen.

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Wellengleichung erhält man:

$$\underline{p}_0 \cdot (-k_x^2 - k_y^2) \cdot e^{-jk_x x} \, e^{-jk_y y} + k_0^2 \cdot \underline{p}_0 \cdot e^{-jk_x x} \, e^{-jk_y y} = 0$$

Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Wellenzahlen:

$$k_y^2 = k_0^2 - k_x^2 \tag{5.3}$$

Da als Randbedingung die Schallschnelle des ebenen Strahlers vorgegeben wird, muss zunächst noch der Zusammenhang zwischen Schalldruck p und Schallschnelle $\vec{v}$ genauer betrachtet werden. Die Gleichung, die die beiden Feldgrößen p und $\vec{v}$ koppelt, ist die Eulersche Bewegungsgleichung (Gleichung 4.6 auf Seite 38). Für harmonische Vorgänge können wir auf die Zeigerschreibweise übergehen und erhalten:

$$\underline{\vec{v}}(x,y) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \cdot \operatorname{grad} \underline{p}(x,y)$$

Der Gradient als vektorieller Differentialoperator kann geschrieben werden als:

$$\operatorname{grad} p(x,y) = \nabla p(x,y) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} p(x,y)$$

Wir setzen auch hier wiederum den Exponentialansatz aus Gleichung 5.2 auf der vorherigen Seite ein:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{v}}(x,y) &= \begin{pmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{pmatrix} = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \cdot \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \underline{p}_0\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y} = \\ &= -\frac{1}{j\omega\rho_0} \cdot \begin{pmatrix} -j\, k_x\, \underline{p}_0\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y} \\ -j\, k_y\, \underline{p}_0\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y} \end{pmatrix} = \frac{\underline{p}_0}{\omega\rho_0} \cdot \begin{pmatrix} k_x\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y} \\ k_y\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun werden die Schallschnelle und die Schnelle des ebenen Strahlers v_S o.B.d.A.[1] an der Stelle $y = 0$ gleichgesetzt. Da der ebene Strahler nur eine Schnellekomponente in y-Richtung aufweist ergibt sich (mit $k_x = k_S$):

$$\begin{aligned} \underline{v}_y(x,0) &= \frac{\underline{p}_0}{\omega\rho_0} k_y\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y 0} \stackrel{!}{=} \underline{v}_S(k_x)\, e^{-jk_S x} \Rightarrow \\ \underline{p}_0 &= \frac{\underline{v}_S(k_x)\, \omega\rho_0}{k_y} = \frac{\underline{v}_S(k_x)\, \rho_0 c_0 k_0}{k_y} \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für p_0 in den Exponentialansatz für den Schalldruck ein, ergibt sich als spezielle Lösung (mit $k_x = k_S$ und $k_y = \sqrt{k_0^2 - k_S^2}$, siehe Gleichung 5.3 auf der vorherigen Seite):

$$\boxed{\underline{p}(x,y) = \frac{\underline{v}_S(k_x)\, \rho_0 c_0}{\sqrt{1 - k_S^2/k_0^2}}\, e^{-jk_S x}\, e^{-j\sqrt{k_0^2 - k_S^2}\, y}} \tag{5.4}$$

Das ist die Grundlösung für den Schalldruck in der Luft, wenn sich als Randbedingung eine ebene Welle entlang einer Koordinatenachse bewegt.

Hier sind nun 2 wichtige Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob der Term $k_0^2 - k_S^2$ größer oder kleiner als 0 wird:

1. $\boldsymbol{k_0^2 - k_S^2 > 0}$: Die Wurzel ist reel. Damit ist der Exponent komplex und die Lösung ist trigonometrisch. Es gibt eine Wellenausbreitung, bei der sich in der Luft eine Welle vom ebenen Strahler ablöst und Energie von ihm weg transportiert. Stichwort „Fernfeld“.

[1] o.B.d.A. = ohne Beschränkung der Allgemeinheit

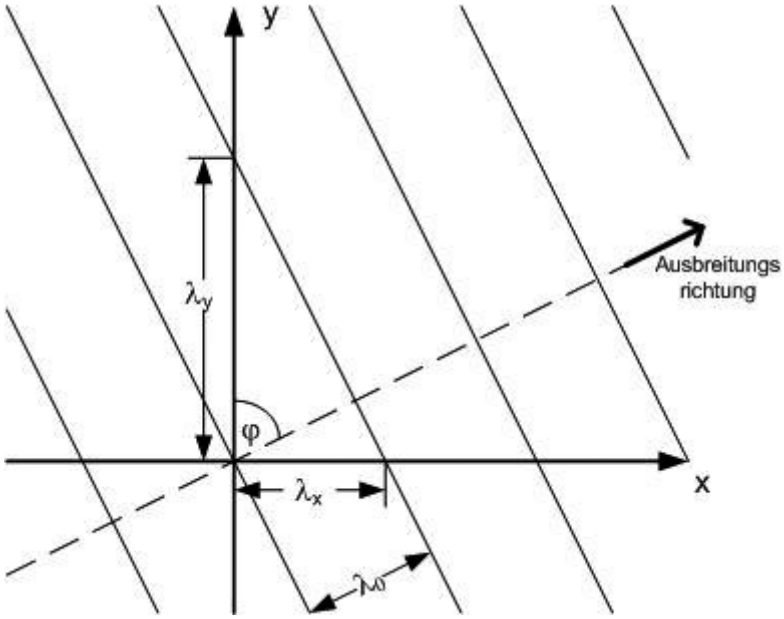


Abbildung 5.3: Ebene Wellenausbreitung in der x, y-Ebene

2. $\boldsymbol{k_0^2 - k_S^2 < 0}$: Die Wurzel wird komplex. Der gesamte Exponent wird somit reell und der Term beschreibt einen exponentiell gedämpften Verlauf des Drucks. Es wird keine Energie abgestrahlt. Dies ist die sogenannte „Nahfeldlösung“. Stichwort: „Nahfeld (evanescent waves)“

Nur im **Fall 1** mit $k_S < k_0$ ergibt sich eine Wellenabstrahlung vom ebenen Strahler. Das bedeutet, dass nur Anteile mit größerer Wellenlänge λ_S als die der freien Wellenlänge in der Luft λ_0 überhaupt abstrahlfähig sind ($\lambda_S > \lambda_0$).
Wir wollen Gleichung 5.4 auf der vorherigen Seite mit der Gleichung für eine ebene Welle vergleichen, die sich im Winkel φ zur y-Achse ausbreitet (siehe Abbildung 5.3). Aus Abbildung 5.3 ist ersichtlich, dass gilt:

$$\lambda_0 = \lambda_x \cdot \sin(\varphi) \;\Rightarrow\; \lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sin(\varphi)}$$
$$\lambda_0 = \lambda_y \cdot \cos(\varphi) \;\Rightarrow\; \lambda_y = \frac{\lambda_0}{\cos(\varphi)}$$

Mit

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

folgt daraus

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sin(\varphi) = k_0 \cdot \sin(\varphi)$$
$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cos(\varphi) = k_0 \cdot \cos(\varphi)$$

Die ebene Welle, die sich unter dem Winkel φ zur y-Achse ausbreitet, kann also durch den folgenden komplexen Ansatz beschrieben werden:

$$p_e(x,y) = \underline{p}_0\, e^{-jk_0 x \cdot sin(\varphi)}\, e^{-jk_0 y \cdot cos(\varphi)} \tag{5.5}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gleichung 5.4 auf Seite 45, so stellt man fest, dass im Fall der Abstrahlung des ebenen Strahlers ins Fernfeld eine ebene Welle unter eben dem Winkel φ abgestrahlt wird, der sich aus

$$k_S = k_0 \cdot \sin(\varphi)$$

ergibt.

Kurzwellige Anteile des ebenen Strahlers ($k_S > k_0$, also $\lambda_S < \lambda_0$), wie im **Fall 2**, führen hingegen zu *keiner* Schallabstrahlung. Es entsteht nur ein Nahfeld, in dem der Druck von der Strahlerfläche weg exponentiell abnimmt. Die Luftteilchen vor dem Strahler bewegen sich auf ellipsenförmigen Bahnen. Im *Grenzfall*, $k_S >> k_0$ bzw. $\lambda_S << \lambda_0$ werden sie praktisch zu Kreisen (siehe [Cremer und Müller 1976]) und es liegen nur noch kompressionslose Bewegungen vor, die lediglich dem Massenausgleich dienen. Dann spricht man vom sogenannten „hydrodynamischen Nahfeld“.

Zum besseren Verständnis sind die 2 unterschiedlichen Fälle in den Abbildungen 5.4 und 5.5 dargestellt. Die Abbildung 5.5 auf der nächsten Seite entsteht, einem Vorschlag von Dr. Manfred Heckl folgend, indem die Teilchenbewegungen im den Strahler umgebenden Medium berechnet und dargestellt werden. Dazu wird die Teilchenauslenkung durch Gradientenbildung aus dem Druck bestimmt und für äquidistante Raumpunkte berechnet. Zeichnet man die Teilchen in Form dieses Punktrasters am Ort ihrer momentanen Lage auf, so erhält man eine Momentaufnahme des Schallfeldes. Diese quasi-fotografische Methode bietet den Vorteil großer Anschaulichkeit in der Darstellung der wichtigsten physikalischen Phänomene (siehe [Möser 1988], S. 11).

In Zusammenhang mit *Abstrahlproblemen von Biegewellen* sind beide Fälle zu beobachten - die Abstrahlung in das Fernfeld und die Nahfelder. Biegewellen weisen nämlich (wie wir in Kapitel 7 auf Seite 71 zeigen werden) Dispersion auf, das heißt die Phasengeschwindigkeit c_B der Biegewellen auf der Platte ist frequenzabhängig. Je nach Frequenz der Biegewelle wird deren Wellenlänge λ_B nun einmal unterhalb der Wellenlänge der freien Luftwelle λ_0 liegen und einmal oberhalb von ihr:

$$\lambda_B \propto \frac{1}{\sqrt{f}} \qquad \lambda_L \propto \frac{1}{f}$$

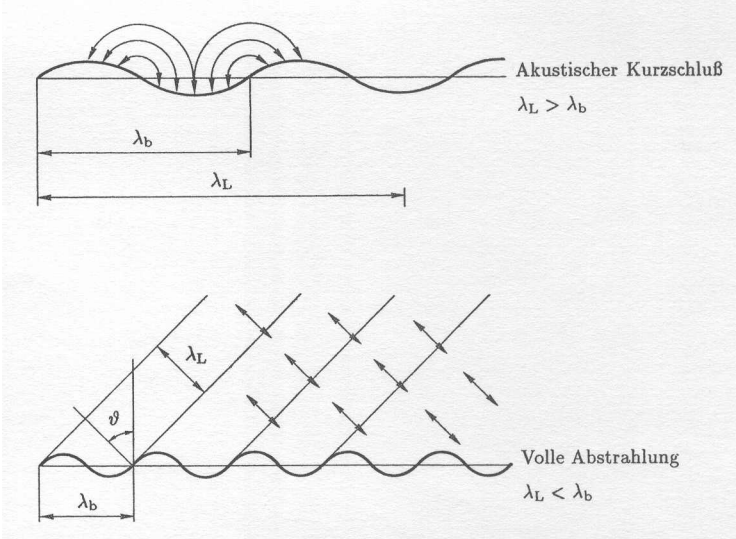


Abbildung 5.4: Schallabstrahlung vom ebenen Stahler, 1D-Fall (aus [Kollmann 1993], S. 63)

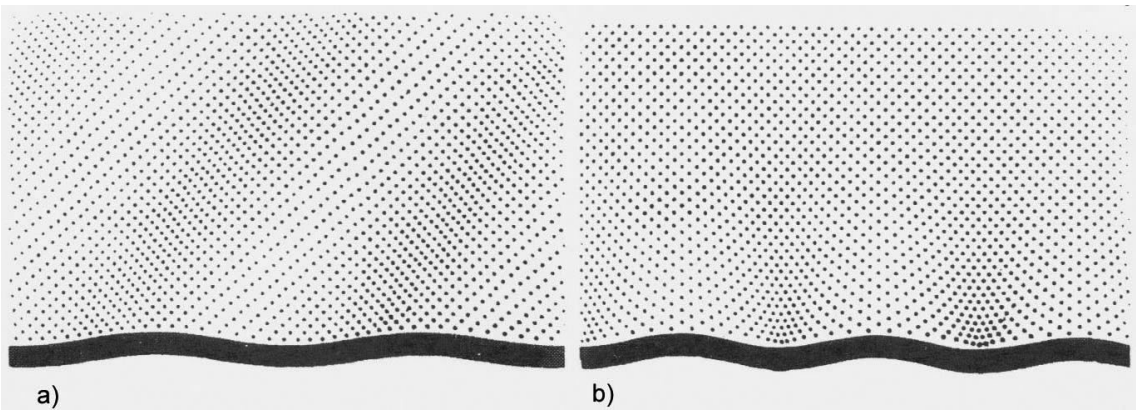
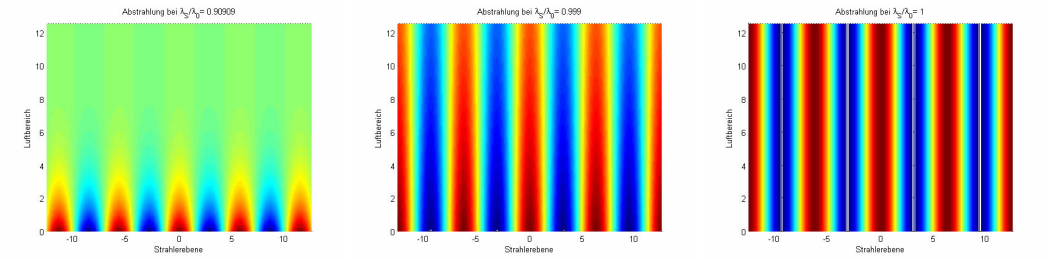
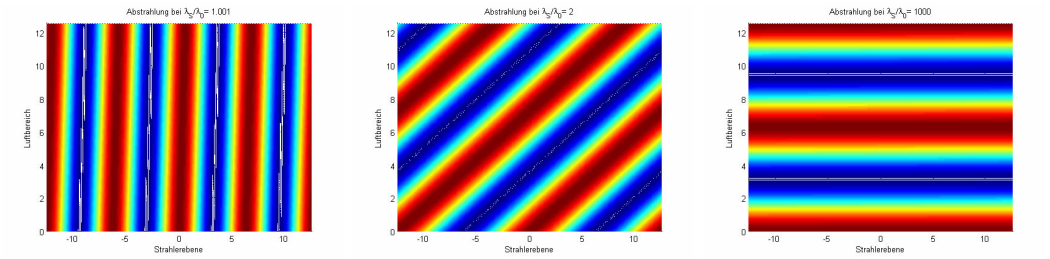


Abbildung 5.5: Punktdiagramm der Schallabstrahlung vom ebenen Stahler, 1D-Fall
a) $\lambda_S > \lambda_0$ (Abstrahlung)
b) $\lambda_S < \lambda_0$ (Exponentielles Nahfeld)
(aus [Cremer und Huber 1990], S. 63)



(a) $\lambda_B/\lambda_0 = 0.909$ (b) $\lambda_B/\lambda_0 = 0.999$ (c) $\lambda_B/\lambda_0 = 1$

Abbildung 5.6: Beispiele für die Schallabstrahlung von der unendlichen Platte bis zur Koinzidenzfrequenz



(a) $\lambda_B/\lambda_0 = 1.001$ (b) $\lambda_B/\lambda_0 = 2$ (c) $\lambda_B/\lambda_0 = 1000$

Abbildung 5.7: Beispiele für die Schallabstrahlung von der unendlichen Platte oberhalb der Koinzidenzfrequenz

Die Grenzfrequenz, bei der λ_B gleich λ_0 ist und gerade schon Schall abgestrahlt wird, nennt man **Koinzidenzfrequenz** f_K. Mit steigender Frequenz ergeben sich folgende Fälle für die Abstrahlung in die Luft vor der Platte:

1. Unterhalb von f_K ist die Welle auf der Platte „kurzwellig“ gegenüber der Luft ($\lambda_B < \lambda_0$) und es treten nur Nahfelder in der Luft direkt vor der Platte auf. Diese klingen mit zunehmendem Abstand von der Plattenoberfläche exponentiell ab. Es wird keine Energie von der Platte in die Luft abgestrahlt.

2. Erreicht die Frequenz der Biegewelle f_K, ($\lambda_B = \lambda_0$) beginnt sich eine Welle in der Luft auszubreiten, die parallel zur Plattenoberfläche läuft.

3. Mit weiter steigender Frequenz ($\lambda_B > \lambda_0$) steigt der Winkel zwischen Plattenoberfläche und Richtung der Wellenausbreitung in der Luft.

4. Ist λ_B sehr groß im Vergleich zu λ_0 ($\lambda_B \gg \lambda_0$), strahlt die unendliche Platte eine nahezu ebene Welle normal zu ihrer Oberfläche ab.

Diese Zusammenhänge sind in den Abbildungen 5.6 bis 5.7 illustriert.

5.3 Zweidimensionale Wellenausbreitung

5.3.1 Allgemeiner Fall

Die Gleichungen des vorigen Abschnittes können problemlos auf den Fall erweitert werden, bei dem sich eine Transversalwelle in beliebiger Richtung (in beiden Dimensionen) in der Ebene ausbreitet. Jetzt schreiben wir allerdings die Gleichungen für den Fall auf, in dem der Strahler in der x, y-Ebene liegt, die ebene transversale Welle sich also in der x, y-Ebene in beliebiger Richtung fortpflanzt. Die z-Richtung ist also die Normalrichtung dieser Ebene und damit die Richtung der Auslenkung des ebenen Strahlers.

Die vorgegebene Schnelle des Strahlers in z-Richtung ($\vec{e}_z$) kann dann durch

$$\underline{\vec{v}}_S(x,y) = \underline{v}_S(k_x,k_y)\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y} \cdot \vec{e}_z \tag{5.6}$$

beschrieben werden und verursacht im umgebenden Medium einen Schalldruck:

$$\begin{aligned} \underline{p}(x,y,z) &= \frac{\rho_0 c_0 k_0 \cdot \underline{v}_S(k_x,k_y)}{k_z}\, e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-jk_z z} = \\ &= \underline{p}(k_x,k_y) \cdot e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-jk_z z} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Dabei ist

$$\underline{p}(k_x,k_y) = \frac{\rho_0 c_0 k_0 \cdot \underline{v}_S(k_x,k_y)}{k_z} \tag{5.8}$$

und

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \tag{5.9}$$

Jetzt beschreiben wir die Strahlerschnelle als Fourier-Rücktransformierte eines Wellenzahlspektrums - das entspricht der Zusammensetzung der tatsächlichen Schwingungsform aus ebenen Wellen:

$$\underline{\vec{v}}_S = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \underline{v}_S(k_x,k_y) \cdot e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, dk_x dk_y \cdot \vec{e}_z \tag{5.10}$$

Um den gesamten Schalldruck zu erhalten, muss über die Schalldrücke summiert (integriert) werden, die durch die einzelnen Wellenelemente erzeugt werden:

$$\boxed{\underline{p}(x,y,z) = \frac{\rho_0 c_0 k_0}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{v}_S(k_x,k_y)}{k_z} \cdot e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, dk_x dk_y} \tag{5.11}$$

Das Wellenzahlspektrum der Strahlerschnelle erhält man dabei aus der Fouriertransformation der Normalkomponente der Strahlerschnelle $\underline{v}_S(x,y)$:

$$\underline{v}_S(k_x, k_y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \underline{v}_S(x, y) \cdot e^{jk_x x}\, e^{jk_y y}\, dxdy \tag{5.12}$$

Mit dieser Methode ist es also nicht nur möglich, die Abstrahlung von Schub- oder Biegewellen zu berechnen, sie kann sogar anstelle der klassischen Methode für die Berechnung der Kolbenmembran genutzt werden!

> Anmerkung: Durch die Hintransformation in den Wellenzahlbereich zerlegen wir die örtlichen Funktionen in eine eine Überlagerung von Wellen. Positive Wellenzahlen sollen dabei ausstrahlende Wellen darstellen. Aus Gründen, die wir bereits in der Anmerkung auf Seite 44 geklärt haben, müssen daher negative Vorzeichen in den Exponenten mit den Wellenzahlen vorkommen. Wir entscheiden wir uns also bei der *Hintransformation* in den Spektralbereich (Wellenzahlbereich) für *positive Exponenten* im Kern der Transformation. Bei der *Rücktransformation* in den Originalbereich (Ortsbereich) integrieren (bzw. summieren) wir dann bei den positiven Wellenzahlen über ausstrahlende Wellen (wegen der *negativen Exponenten* im Kern der Rücktransformation).

Strahlungsimpedanz des ebenen Strahlers

Durch Betrachtung des Verhältnisses von Schalldruck zu Schallschnelle an der Strahleroberfläche erhält man die Strahlungsimpedanz Z_{rad} (der Index 'rad' steht für das englische 'radiation') des ebenen Schallstrahlers bzw. der unendlichen Platte. Im Unterschied zur Wellenimpedanz besteht hier nicht die Forderung, dass Druck und Schnelle dieselbe räumliche Verteilung aufweisen müssen.

$$\underline{Z}_{rad} = \frac{\underline{p}(k_x, k_y)}{\underline{v}(k_x, k_y)} \tag{5.13}$$

Die Lösungsgleichung für den Schalldruck enthält bereits die Wellenzahlspektren von Druck und Schnelle, denn die Schnelle des Strahlers ist an der Oberfläche mit der Schallschnelle identisch:

$$\underline{v}(k_x, k_y)|_{z_0} = \underline{v}_S(k_x, k_y)$$

Die Strahlungsimpedanz des unendlich ausgedehnten ebenen Strahlers (und auch der unendlichen Platte) ist daher:

$$\boxed{\underline{Z}_{rad} = \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}} \tag{5.14}$$

5.3.2 Rotationssymmetrischer Fall

Ist die Strahlerschnelle rotationssymmetrisch, lässt sich die 2D-Fouriertransformation durch eine eindimensionale Transformation, nämlich die Hankel-Transformation (siehe Anhang E auf Seite 145), ersetzten. Dies scheint auch intuitiv logisch, da die Strahlerschnelle im rotationssymmetrischen Fall ja nur von einem einzigen freien Parameter (nämlich dem Radius r) abhängt.

Der Druck kann in diesem Fall den Zylinderkoordinaten entsprechend angesetzt werden als:

$$\underline{p}(r,z) = \underline{p}(k_r)\, k_r\, J_0(k_r, r) \cdot e^{jk_z z} \tag{5.15}$$

Ersetzt man in der Gleichung 5.9 auf Seite 50 den Ausdruck $(k_x^2 + k_y^2)$ durch k_r^2, erhält man eine entsprechende Beziehung für die Wellenzahlen:

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_r^2} \tag{5.16}$$

Auch in Gleichung 5.14 kann der Wurzel-Ausdruck substituiert werden.

5.4 Kopplung Platte/Luft

Bis jetzt sind wir immer von der Schwingungsform des ebenen Strahlers ausgegangen, um daraus den Schalldruck in der umgebenden Luft zu berechnen. Nun wollen wir die Bewegung der Platte mit der Luft koppeln und einen Weg finden, den erzeugten Schalldruck zu berechnen, *ohne* die Bewegung des Strahlers genau kennen zu müssen (siehe [Cremer und Heckl 1995], S. 504 ff.).

An der Oberfläche des Strahlers, also der Platte, muss die Summe aller Kräfte Null ergeben. Also ist der resultierende Druck p_S, der auf den Strahler wirkt, an jeder Stelle x, y gleich dem anregendem Druck p_A minus dem Druck p_L, der durch die Rückwirkung der Luft entsteht. Im Spektralbereich ist es genau dasselbe: Das Wellenzahlspektrum der resultierenden Druckverteilung setzt sich aus dem Wellenzahlspektrum der anregenden Verteilung abzüglich des Wellenzahlspektrums der durch die Rückwirkung der Luft entstehenden Druckverteilung zusammen. Wir können also formulieren:

$$\underline{p}_S(k_x, k_y) = \underline{p}_A(k_x, k_y) - \underline{p}_L(k_x, k_y) \tag{5.17}$$

mit den Wellenzahlspektren

$\underline{p}_S(k_x, k_y)$ ... resultierende Druckverteilung (Strahler)
$\underline{p}_A(k_x, k_y)$ ... anregende Druckverteilung (Antrieb)
$\underline{p}_L(k_x, k_y)$ ... rückwirkende Druckverteilung (Luft)

Nun werden wir 2 Impedanzen nutzen: Die Strahlungsimpedanz $\underline{Z}_{rad}$ und die Wellenimpedanz $\underline{Z}_W$ (siehe Anhang B auf Seite 133).
Für eine harmonische Schwingung einer bestimmten Frequenz hängen die Druck- und Schnelleverteilung des ebenen Strahlers selbst über die *Wellenimpedanz* zusammen:

$$\underline{p}_S(k_x, k_y) = \underline{Z}_W \cdot \underline{v}_S(k_x, k_y) \tag{5.18}$$

Aus Gründen, die wir bereits am Ende von Kapitel 5.3 (S. 51) geklärt haben, gilt dabei für die Hintransformation der anregenden Druckverteilung in den Wellenzahlbereich:

$$\underline{p}_A(k_x, k_y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \underline{p}_A(x, y) \cdot e^{jk_x x}\, e^{jk_y y}\, dxdy \tag{5.19}$$

Bei der Rücktransformation aus dem Wellenbereich integrieren (summieren) wir dann über ausstrahlende Wellen (wegen der negativen Exponenten im Rücktransformations-Kern), setzten also den gesamten anregenden Druck aus Wellen zusammen. Die rückwirkende Druckverteilung entsteht durch die Bewegung der Platte. Sie ist die Verteilung des abgestrahlten Schalldrucks und hängt mit der Schnelle der Platte über die *Strahlungsimpedanz* zusammen:

$$\underline{p}_L(k_x, k_y) = \underline{Z}_{Rad} \cdot \underline{v}_S(k_x, k_y) \tag{5.20}$$

Setzen wir die Gleichungen nun ineinander ein

$$\overbrace{\underline{Z}_W \cdot \underline{v}_S(k_x, k_y)}^{\underline{p}_S} = \underline{p}_A(k_x, k_y) - \overbrace{\underline{Z}_{rad} \cdot \underline{v}_S(k_x, k_y)}^{\underline{p}_L}$$

$$\underline{v}_S(k_x, k_y) = \frac{\underline{p}_L(k_x, k_y)}{\underline{Z}_{rad}} = \frac{\underline{p}_A(k_x, k_y)}{\underline{Z}_W + \underline{Z}_{rad}}$$

folgt daraus der Zusammenhang zwischen anregender Druckverteilung und erzeugter Druckverteilung:

$$\underline{p}_L(k_x, k_y) = \frac{\underline{Z}_{rad}}{\underline{Z}_W + \underline{Z}_{rad}} \cdot \underline{p}_A(k_x, k_y) \tag{5.21}$$

Nach Rücktransformation und mit

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

ergibt sich dann:

$$\boxed{\underline{p}_L(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{Z}_{rad}}{\underline{Z}_W + \underline{Z}_{rad}} \cdot \underline{p}_A(k_x, k_y) \cdot e^{-jk_x x}\, e^{-jk_y y}\, e^{-jk_z z}\, dk_x dk_y} \tag{5.22}$$

Im radialsymmetrischen Fall können wir wieder statt der 2D-Fouriertransformation eine Hankel-Transformation benutzen und $k_x^2 + k_y^2 = k_r^2$ setzen.

Damit ist es nun auch möglich, aus einer gegebenen Anregung (Kraftverteilung) direkt den erzeugten Schalldruck zu berechnen, ohne die Bewegung des Strahlers (in unserem Fall der unendlichen Platte) im Detail kennen zu müssen. Unser Ziel bei der Lösung der Bewegungsgleichung der dünnen Platte wird also auch sein, einen Ausdruck für die Wellenimpedanz aufzustellen, damit wir dann den Schalldruck in der Luft direkt aus der anregenden Druckverteilung des Manger-Schallwandlers berechnen können. Allerdings ist die Anwendung dieser Methode auf die Berechnung der Schallabstrahlung der *unendlichen* Platte beschränkt, da die Wellenimpedanz nur für unendlich große, homogene Strukturen definiert werden kann.

Teil II

Analytische Beschreibung

Kapitel 6

Die Differentialgleichung der Kirchhoff-Platte

In diesem Abschnitt wollen wir die Gleichungen herleiten, die die Bewegung dünner Platten beschreiben. Dies ist notwendig, da Biegewellen hauptsächlich in dünnen Platten entstehen und kommerziell verfügbare Biegewellen-Schallwandler daher als schallabstrahlende Fläche dünne Platten oder Schalen nutzen.
Zunächst (Kapitel 6.1) wollen einen Überblick über die Vereinfachungen in Abhängigkeit von der Plattendicke geben und noch einmal den Unterschied, den die Festigkeitslehre zwischen einer Membran und einer Platte macht, deutlich hervorheben. In Kapitel 6.2 werden wir dann die Kirchhoff'sche Plattengleichung herleiten. Mit ihr können wir die Biegewellenausbreitung in dünnen Platten beschreiben.

6.1 Einleitung

Aus [Stephan und Postl 1995], S. 212: „**Platten** sind ebene flächenförmige Strukturelemente, deren Dicke im Verhältnis zu den beiden anderen Abmessungen klein ist. Geometrisch unterscheiden sie sich demnach nicht von den Scheiben, ihre Belastung wirkt jedoch senkrecht zur Mittelebene.“ Flächentragwerke mit gekrümmter Mittelfläche werden als **Schalen** bezeichnet. Die Schalen schließen als Sonderfall natürlich die Platte mit ein. In vielen Fällen sind bei Finite-Elemente-Programmen oder Programmpaketen keine Plattenelemente vorhanden. Die Platte kann dann aber einfach mit Schalenelementen modelliert werden.
Die Platte sollte auf keinen Fall mit einer **Membran** verwechselt werden. Dazu ebenfalls aus [Stephan und Postl 1995], S.212: „Unter einer Membran versteht man ein sehr dünnes Flächentragwerk, das durch Randkräfte vorgespannt wird. Das Analogon zur Membran im eindimensionalen Fall ist die Saite.“ Querkräfte und Momente werden wegen der *fehlenden Biegesteife der Membran* nicht übertragen!

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen für die Platte sind selbstverständlich möglichst viele Vereinfachungen vorzunehmen. Lösungen von Problemen mit

bestimmten Vereinfachungen bekommen dann üblicherweise eigene Namen. Auch bei Nicht-Mechanikern bekannt ist zum Beispiel der sogenannte **„Euler-Bernoulli-Balken“** (oft auch nur Bernoulli-Balken genannt). Bei der Herleitung der ihn Beschreibenden Gleichung werden folgende Vereinfachungen getroffen (siehe auch [Stephan und Postl 1995], S. 162):

- Ebene Querschnitte bleiben auch nach der Deformation eben
- jede Normale zur Stabachse steht auch nach der Verformung senkrecht zur Stabachse

Ein solcher auf *reine Biegung* beanspruchter Stab (Balken) ist dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Querschnitt nur ein Biegemoment, aber keine Längs- oder Querkraft und kein Torsionsmoment übertragen wird ([Parkus 1983], S. 188). Das bedeutet, dass Querkraftschubdeformationen und Querschnittsverwölbungen beim Bernoulli-Balken vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigungen sind in den meisten Fällen auch dann zulässig, wenn keine *reine* Biegung mehr vorliegt. Die resultierende Differentialgleichung wird daher auch näherungsweise für die Querkraftbiegung verwendet. Jedoch reicht z.B. bei hochstegigen (schmalen und hohen) Querschnitten häufig die Genauigkeit des Euler-Bernoulli-Balkens nicht mehr aus([Stephan und Postl 1995], S. 165). Nach Timoshenko wurde die Lösung des Problems benannt, die die Querkraftschubdeformation und Rotationsträgheit berücksichtigt, aber die Querschnittsverwölbung weiterhin vernachlässigt: der sogenannte **„Timoshenko-Balken“**.

Wie bei den Balken sind auch bei Platten je nach Problemstellung verschiedene Modelle gebräuchlich. Nach [Stephan und Postl 1995] (S. 212) ist das wesentliche Unterscheidungskriterium ist Verhältnis der Plattendicke h zu den Abmessungen der Plattenmittelfläche:

Merkmale	sehr dünn	dünn	mittel-dick	dick
Spannungen senkrecht zur Mittelebene berücksichtigt	0	0	0	1
Querkraftschubdeformation berücksichtigt	0	0	1	1
Querschnitte bleiben eben	1	1	1	0
Membranspannungen berücksichtigt	1	0	0	0
Rotationsträgheit berücksichtigt	0	0	1	1
0=nein,1=ja				

Dabei können die 2 klassischen Lösungen der Festigkeitslehre für Platten folgendermaßen zugeordnet werden:

- Die Merkmale der *dünnen Platte* liegen der **Kirchhoff**’schen Theorie zugrunde und

- die Merkmale der *mitteldicken Platten* der Theorie von **Mindlin**

In der Plattentheorie von *Mindlin* werden gegenüber der Kirchoff-Theorie die Querkraftschubdeformation und die Rotationsträgheit näherungsweise erfasst ([Stephan und Postl 1995], S. 231). Bei der Mindlin-Platte lassen sich (im Gegensatz zur Kirchhoff-Platte!) alle Randbedingungen erfüllen.
Verschiedene Bücher der Literaturliste enthalten Herleitungen der Platten-Gleichungen:

- Herleitung anhand des Zylinderelementes: [Parkus 1983], S. 252 ff.
- kurze Herleitungen der Kirchoff- und auch der Mindlin-Platte: [Stephan und Postl 1995], S. 212 ff
- Weitere Ableitungen sind zu finden in: [Waubke 2003], [Cremer und Heckl 1995] und [Altrichter 1999]

6.2 Herleitung der Plattengleichung

Da der Manger-Schallwandler eine dünne, nicht vorgespannte (eigentlich 3-lagige) Weichkunststoff-Platte als schallabstrahlendes Element verwendet, scheint es legitim, die Kirchhoff'sche Plattentheorie zu deren Berechnung heranzuziehen. Wir werden, dieser Theorie folgend, die Bewegungsgleichungen der Platte herleiten und dabei nach folgendem Schema vorgehen:

1. Anschreiben der Spannungen σ am Plattenelement (Betrachtungen mittels differentiellem Schnitt am Plattenelement)
2. Einbringen der spezifischen Vereinfachungen der Kirchhoff'schen Plattentheorie
3. Anschreiben der linearisierten Beziehungen zwischen Verzerrungen ε und Verschiebungen ξ, η, ζ (aus Kapitel 3.2.2)
4. Anschreiben der Beziehungen zwischen Spannungen σ und Verzerrungen ε
5. Durch Einsetzen der Beziehungen aus Punkt 4 in die Beziehungen aus Punkt 3 (oder umgekehrt) eine Beziehung zwischen Spannungen σ und Verschiebungen ξ, η, ζ erzeugen
6. Die Spannungen σ aus Punkt 5 durch Integration über die Dicke der Platte zu Schnittgrößen (Kräften F und Momenten M) überführen - dadurch erhält man schließlich eine Beziehung zwischen Schnittgrößen (F, M) und Verschiebungen ξ, η, ζ

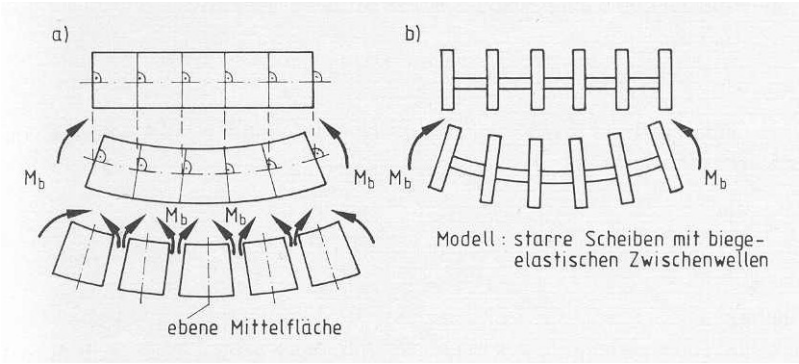


Abbildung 6.1: Vereinfachungen beim Bernoulli-Balken

7. Aufstellen der Kräfte- und Momentengleichgewichte mit den Schnittgrößen (F, M)

8. Durch Einsetzen der Beziehungen 6 in die Gleichungen 7 und sukzessives Eliminieren aller anderen Feldgrößen eine Differentialgleichung herleiten, die die Verschiebung in z-Richtung (ζ) beschreibt!

Die Vereinfachungen der Kirchhoff'schen Plattentheorie entsprechen denen des Biegebalkens nach Bernoulli (siehe [Stephan und Postl 1995], S. 213) und sind nur leicht erweitert:

1. Vor der Verformung ebene Querschnitte bleiben auch nach der Verformung der Platte eben

2. Senkrechte zur Plattenmittelfläche bleiben auch bei verformter Mittelfläche senkrecht zu dieser

3. Querkraftschubdeformationen werden vernachlässigt

4. Rotationsträgheiten werden vernachlässigt

5. Spannungen senkrecht zur Plattenmittelebene bleiben unberücksichtigt

6. Membranspannungen infolge der Querausbiegung werden nicht erfasst

Für die genügend genaue Gültigkeit der vereinfachenden Annahmen muss angenommen werden, dass die Dicke der Platte gegenüber den übrigen Abmessungen der Platte und auch im Verhältnis zur Wellenlänge der Biegewelle klein ist. Am Beispiel des Balkens (siehe Abbildungen 6.1 und 6.2 auf der nächsten Seite) können die ersten beiden Punkte schön veranschaulicht werden, die Verallgemeinerung auf die Platte ist recht geradlinig.

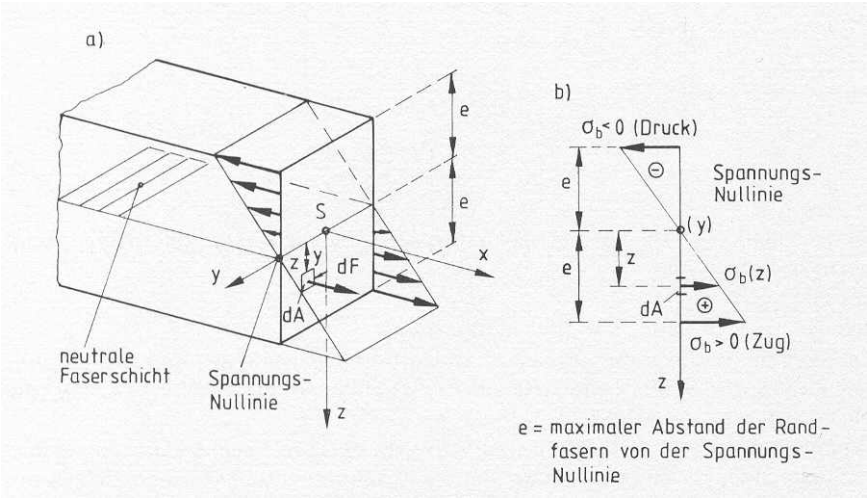


Abbildung 6.2: Spannungsverteilung am Bernoulli-Balken

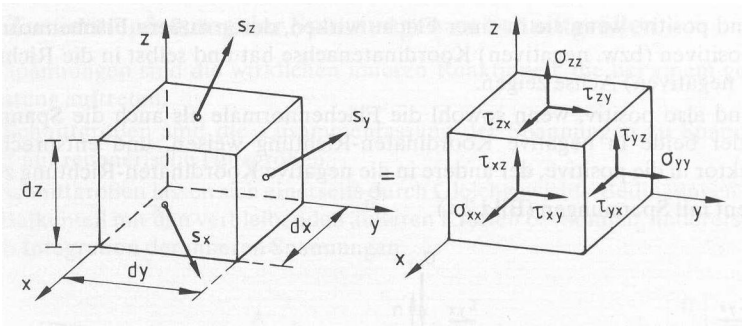


Abbildung 6.3: Spannungen am Quaderelement

6.2.1 Elastizität

Zur besseren Orientierung soll an dieser Stelle noch einmal die Abbildung aus Kapitel 3 mit der Darstellung der Spannungen am Element herangezogen werden (jetzt Abb. 6.3).

Mit den oben genannten Vereinfachungen kann also der allgemeine Spannungszustand hinreichend genau durch den ebenen Spannungszustand angenähert werden. Der allgemeine Spannungstensor 3.2 auf Seite 20 degeneriert zu dem Spannungstensor des ebenen Spannungszustandes (Gleichung 3.3), bei dem $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ sind. Die allgemeinen Spannungs-/Dehnungsbeziehungen (Gleichungen 3.21 auf Seite 32 und 3.22 auf Seite 33) vereinfachen sich dementsprechend. Die **Spannungs-/Verzerrungsbeziehungen** bei der Kirchhoff-Platte lauten also:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu\,\sigma_y] \tag{6.1a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu\,\sigma_x] \tag{6.1b}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{6.1c}$$

Nach den Spannungen aufgelöst lauten die Beziehungen:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y) \tag{6.2a}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\mu\,\varepsilon_x + \varepsilon_y) \tag{6.2b}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \tag{6.2c}$$

Der **Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen** (Dehnungen bzw. Gleitungen) ist bereits in Kapitel 3.2.2, Gleichung 3.13 auf Seite 29 hergeleitet worden. Um Verwechslungen mit der Schnelle v aus dem Weg zu gehen, bezeichnen wir die Verschiebungen nun nicht mit u, v, w, sondern mit ξ, η, ζ.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Hinzu kommt noch die Beziehung zwischen der Krümmung der Plattenmittelfläche und den Dehnungen bzw. Stauchungen in der Querschnittsfläche. In der einfachen Elastizitätstheorie wird die Beziehung zwischen Verschiebungen und Verdrehungen linearisiert.
Die vereinfachenden Annahmen der Kirchhoff'schen Plattentheorie (Eben-bleiben der Querschnitte und Senkrecht-bleiben der Querschnitte) entsprechen der Annahme einer linearen Spannungsverteilung in z-Richtung[1]. Damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Mit dieser Hypothese ist es nun möglich, die Verzerrungen in ausschließlicher Abhängigkeit von der Verschiebung in z-Richtung (ζ) auszudrücken. Dazu setzen wir

[1] Siehe auch Abbildung 6.2 auf der vorherigen Seite (Spannungsverteilung beim Bernoulli-Balken)

die Beziehungen für ε_x und ε_y aus den Gleichungen 6.3 auf der vorherigen Seite in die Gleichungen 6.4 auf der vorherigen Seite ein, lösen diese nach ξ und η auf:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Bigg| \int \partial x \qquad \Rightarrow \qquad \xi = -z \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \Bigg| \int \partial y \qquad \Rightarrow \qquad \eta = -z \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

leiten diese Gleichungen dann wiederum nach y und x ab

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -z \, \frac{\partial \zeta}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -z \, \frac{\partial \zeta}{\partial x \partial y}$$

und setzen sie in die Beziehung für γ_{xy} aus Gleichung 6.3 auf der vorherigen Seite ein:

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = -2z \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \tag{6.5}$$

Wir haben dadurch einen Satz von Gleichungen gewonnen, der die Verzerrungen ε in Abhängigkeit von der Verschiebung ζ in z-Richtung ausdrückt:

$$\varepsilon_x = -z \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \tag{6.6a}$$
$$\varepsilon_y = -z \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \tag{6.6b}$$
$$\gamma_{xy} = -2z \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \tag{6.6c}$$

Nun können wir die **Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ in Abhängigkeit von den Verschiebungen** ausdrücken[2], indem wir die *Verzerrungen ε eliminieren.* Wir setzen dazu die Gleichungen 6.6 in die Gleichungen 6.2 ein. Zur weiteren Vereinfachung verwenden wir dabei die Beziehung 3.18 auf Seite 31, um auch den Schubmodul G zu eliminieren. Dies ist jedoch reine „Kosmetik“.

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot z \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \tag{6.7a}$$
$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot z \left(\mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \tag{6.7b}$$
$$\tau_{xy} = -\frac{E}{1+\mu} \cdot z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \tag{6.7c}$$

[2] Jetzt benötigen wir nur noch die Verschiebung ζ in z-Richtung

Nun müssen wir noch die *Spannungen über die Höhe der Platte integrieren*, um die **Schnittgrößen pro Längeneinheit** zu erhalten, wie in Kapitel 3.2.1 besprochen (siehe Gleichung 3.4 auf Seite 22). Dann können wir den Schwerpunksatz und den Drallsatz dazu benutzen, die Bewegungsgleichungen für die Kirchhoff-Platte aufzustellen.
Wir integrieren also die Gleichungen 6.7 auf der vorherigen Seite und führen bei der Benennung von Kräften und Momenten folgende Bezeichnungsweise ein:

- 1. Index (bei Kräften *und* Momenten): Die Schnittfläche, die sich durch Konstanthalten dieser Koordinate ergibt und auf die sich die Definition der Kräfte bzw. Momente bezieht.
- 2. Index (*nur* bei Momenten): die Wirkungsrichtung des Momentenvektors (dieser steht senkrecht auf der Drehrichtung und soll der „Rechtsschraubregel" gehorchen). (Die Achse, die das Moment zu verbiegen versucht.)

Es sind also:

- q_x, q_y Querkräfte je Längeneinheit,
- m_{xx}, m_{yy} Biegemomente je Längeneinheit und
- $m_{xy} = m_{yx}$ Torsionsmomente je Längeneinheit

in den Schnittflächen $x = konst.$ bzw. $y = konst.$

Die zu integrierenden Gleichungen 6.7 auf der vorherigen Seite sind alle nur linear in z. Daher tritt immer ein Integral vom folgenden Typ bei der Berechnung der längenbezogenen Momente auf:

$$m = \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} C \cdot z^2 \, dz = C \cdot \frac{h^3}{12} \tag{6.8}$$

Die Querkräfte werden wir später nicht benötigen, also schreiben wir sie hier gar nicht an.

$$m_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \, \sigma_x \, dz \qquad \Rightarrow \quad m_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \tag{6.9a}$$

$$m_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \, \sigma_y \, dz \qquad \Rightarrow \quad m_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \left(\mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \tag{6.9b}$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \, \tau_{xy} \, dz \qquad \Rightarrow \quad m_{xy} = m_{yx} = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \tag{6.9c}$$

Wir haben mit Hilfe der linearisierten Elastizitätstheorie also eine Beziehung zwischen der Verschiebung ζ in z-Richtung und den längenbezogenen Biege- bzw. Torsionsmomenten der isotropen, dünnen Platte erhalten. Die Proportionalitätsfaktoren nennen wir Biegemodul B_b und Torsionsmodul B_t der Platte:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{xx} &= -B_b \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ m_{yy} &= -B_b \cdot \left(\mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ m_{xy} &= m_{yx} = -2B_t \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\ &\text{mit} \\ B_b &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \qquad B_t = \frac{Gh^3}{12}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned}} \tag{6.10}$$

6.2.2 Kräfte- und Momentengleichgewicht

Wie wir gesehen haben, treten bei der „Kirchhoff-Platte“ in den Schnittflächen nur vertikale Querkraft Q, Biegemoment M_b und Torsionsmoment M_t um horizontale Ebenen auf. Zusätzlich kann als Belastung eine Oberflächenkraft wirken, hier der Druck p. Die Trägheit wird als D'Alembertsche Trägheitskraft eingeführt. Mit diesen Größen werden nun die Kräfte- und Momentengleichgewichte aufgestellt bzw. Schwerpunk- und Drallsatz angewandt. Die Bezeichnungsweise der Kräfte und Momente wird beibehalten. Hinzu kommt noch p als äußere Belastung je Flächeneinheit, senkrecht zur Mittelfläche und ζ als Verschiebung der Plattenmittelfläche in z-Richtung (siehe Abb. 6.4).

Bilden wir jetzt die Gleichgewichte:

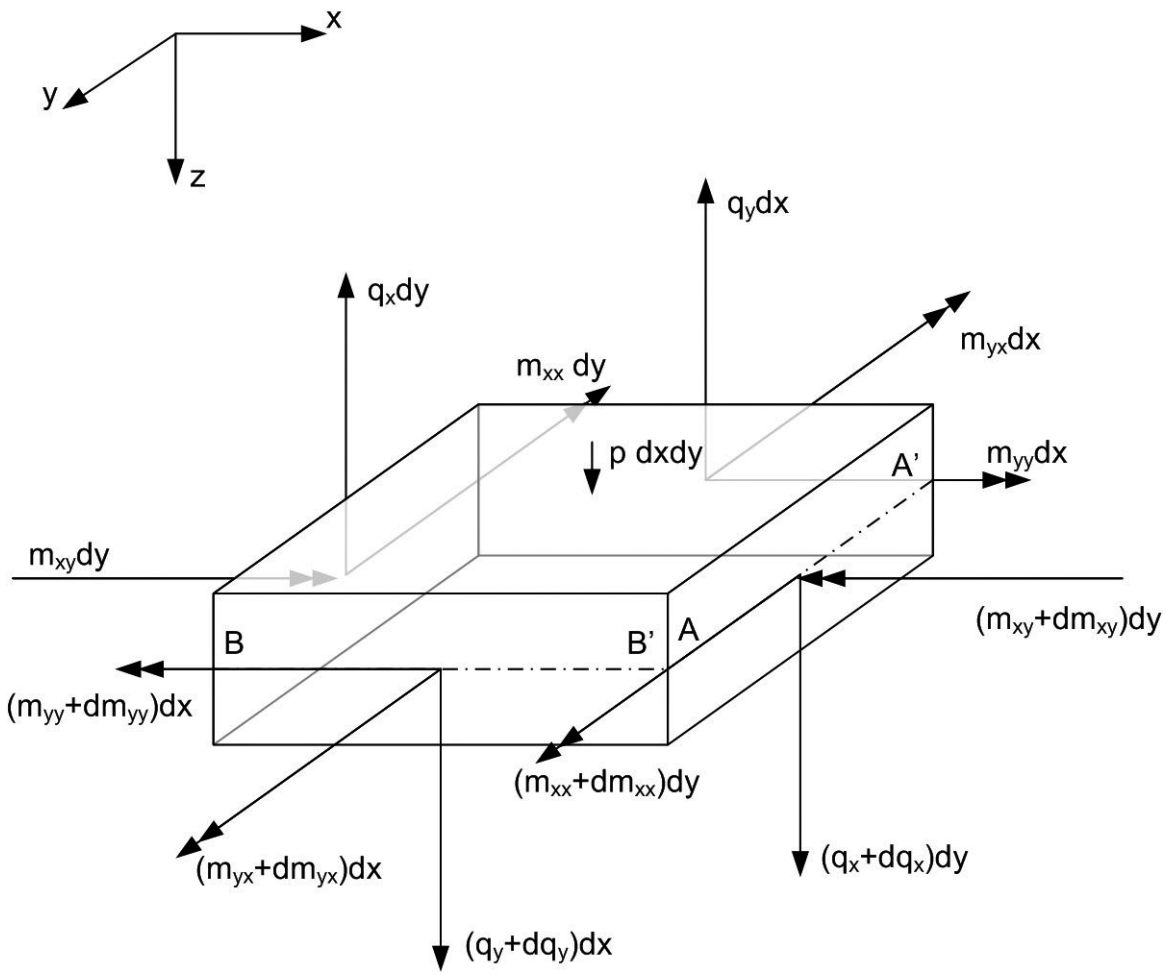


Abbildung 6.4: Plattenelement mit Kräften und Momenten

$$\underline{\sum F_z = 0}:$$

$$\overbrace{p\,dxdy}^{Belastung} - \overbrace{\rho h\,dxdy\,\ddot{\zeta}}^{D'Alembert} - q_x\,dy - q_y\,dx + (q_x + dq_x)\,dy + (q_y + dq_y)\,dy =$$

$$dq_x\,dy + dq_y\,dx + p\,dxdy - \rho h\,dxdy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_x}{dx} + \frac{dq_y}{dy} = -p + \rho h\ddot{\zeta}$$

$$\underline{\sum M(A - A') = 0}:$$

$$p\,dxdy\frac{dx}{2} - \rho h\,dxdy\,\ddot{\zeta}\,\frac{dx}{2} - q_y\,dx\frac{dx}{2} + (q_y + dq_y)\,dx\frac{dx}{2} - q_x\,dydx -$$

$$m_{yx}\,dx + (m_{yx} + dm_{yx})\,dx - m_{xx}\,dy + (m_{xx} + dm_{xx})\,dy = 0$$

$$\underbrace{p\,dxdy\,\frac{dx}{2}}_{k.2.O.} - \underbrace{\rho h\,dxdy\,\ddot{\zeta}\,\frac{dx}{2}}_{k.2.O.} - \underbrace{q_y\,dx\frac{dx}{2}}_{k.2.O.} + q_x\,dydx + dm_{yx}\,dx + dm_{xx}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dm_{yx}}{dy} + \frac{dm_{xx}}{dx} = q_x$$

$$\underline{\sum M(B - B') = 0}:$$

$$p\,dxdy\frac{dy}{2} - \rho h\,dxdy\,\ddot{\zeta}\,\frac{dy}{2} - q_x\,dy\frac{dy}{2} + (q_x + dq_x)\,dy\frac{dy}{2} - q_y\,dydx -$$

$$m_{xy}\,dy + (m_{xy} + dm_{xy})\,dy - m_{yy}\,dx + (m_{yy} + dm_{yy})\,dx = 0$$

$$\underbrace{p\,dxdy\,\frac{dx}{2}}_{k.2.O.} - \underbrace{\rho h\,dxdy\,\ddot{\zeta}\,\frac{dx}{2}}_{k.2.O.} - \underbrace{q_x\,dy\frac{dy}{2}}_{k.2.O.} - q_y\,dydx + dm_{xy}\,dy + dm_{yy}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dm_{xy}}{dx} + \frac{dm_{yy}}{dy} = q_y$$

Produkte, die mehr als einmal dasselbe Differential enthalten, sind klein von höherer Ordnung und werden daher gestrichen. Die Drehträgheiten werden hingegen in der Kirchhoff'schen Plattentheorie (im Gegensatz zur Mindlinschen, siehe [Stephan und Postl 1995], S. 231) schlichtweg vernachlässigt!

Mit

$$
\begin{aligned}
dq_x &= \frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx\,, & dq_y &= \frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy \\
dm_{xx} &= \frac{\partial dm_{xx}}{\partial x}\,dx\,, & dm_{yy} &= \frac{\partial dm_{yy}}{\partial y}\,dy \\
dm_{xy} &= \frac{\partial dm_{xy}}{\partial x}\,dx\,, & dm_{yx} &= \frac{\partial dm_{xy}}{\partial y}\,dy
\end{aligned}
$$

ergeben sich aus den Gleichgewichten die Gleichungen:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p + \rho h \ddot{\zeta} \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} = q_x \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} = q_y \tag{6.13}$$

Nun setzen wir die Gleichungen 6.12 und 6.13 in Gleichung 6.11 ein, und erhalten eine Differentialgleichung in den Momenten:

$$\boxed{\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} - p + \rho h \cdot \ddot{\zeta} = 0} \tag{6.14}$$

6.2.3 Differentialgleichung der Platte

Jetzt können wir die Ergebnisse der Elastizität mit der Differentialgleichung für die Momente „verheiraten“, um auf eine Differentialgleichung zu kommen, in der ausschließlich die Belastung und die Verschiebung ζ in z-Richtung vorkommen. Dazu leiten wir die Gleichungen 6.10 auf Seite 65 (die Beziehungen, die die Momente mit der Verschiebung ζ verknüpfen) ab, setzen sie in die Gleichung 6.14 (Differentialgleichung in den Momenten) ein und formen um.

Differenzieren der Momentenbeziehungen 6.10 auf Seite 65:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} &= -B_b \cdot \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
\frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} &= -B_b \cdot \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} &= -B_t \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2}
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für die Momente (Glg. 6.14):

$$-B_b\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}-B_b\mu\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+2(-2)B_t\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}-B_b\mu\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}-B_b\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=-p+\rho h\,\ddot{\zeta}$$

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+\underbrace{\mu\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+4\frac{B_t}{B_b}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\mu\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}}_{(2\mu+4\frac{B_t}{B_b})\cdot\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=(p-\underbrace{\rho h}_{=m'}\cdot\ddot{\zeta})\cdot\frac{1}{B_b}$$

Mit

$$4\frac{B_t}{B_b}=4\cdot\frac{G\,h^3}{12}\cdot\frac{12\,(1-\mu^2)}{E\,h^3}=4\cdot\frac{E}{2(1+\mu)}\cdot\frac{(1-\mu^2)}{E}=$$
$$=2\cdot\frac{(1+\mu)\,(1-\mu)}{(1+\mu)}=2\,(1-\mu)$$

folgt:

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=(p-\underbrace{\rho h}_{=m'}\cdot\ddot{\zeta})\cdot\frac{1}{B_b}$$

Wir führen jetzt die Operatorschreibweise ein:

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\cdot\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=\Delta\Delta\zeta$$

Der dabei auftretende Operator

$$\Delta\Delta=\Delta^2=\nabla^4$$

wird auch „biharmonischer Operator“ genannt.

So erhält man die Wellengleichung der Biegewellenausbreitung auf einer dünnen Platte (die sogenannte „Kirchhoff'sche Plattengleichung“)

$$\boxed{\Delta\Delta\zeta+\frac{m'}{B}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{p}{B}} \tag{6.16}$$

mit den Abkürzungen:

$$B=B_b=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{h^3}{12} \quad \ldots \quad \text{Biegesteife der Platte}\,[Nm]$$
$$m'=\rho\cdot h \quad \ldots \quad \text{Massenbelag}\,[kg/m^2]$$

6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir gesehen, welche Vereinfachungen man bei der Herleitung der Wellengleichung für dünne Platten benutzt. Dann haben wir die Kirchhoff'sche Plattengleichung hergeleitet - diese partielle Differentialgleichung beschreibt die Bewegung der dünnen Platten.
Im nächsten Kapitel wollen wir uns mit der Lösung der Gleichung beschäftigen. Im Speziellen wollen wir dabei auf die Wellenausbreitung entlang der Platte und ihre Anregung durch auf die Platte wirkende Punktkräfte eingehen. Dies ist deshalb interessant, weil bei elektroakustischen Wandlern die Kraft meist näherungsweise punktförmig oder entlang eines Kreisringes in die abstrahlende Platte eingeleitet wird.

Kapitel 7

Lösung der Kirchhoff'schen Plattengleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Biegewellenausbreitung auf dünnen Platten (aber noch nicht die dadurch hervorgerufene Schallabstrahlung) beschreiben. Dazu gehen wir von der Kirchhoff'schen Plattengleichung aus.
Nach einem Überblick über mögliche Wellenbewegungen auf der Kirchhoff-Platte (Kapitel 7.1) wollen wir detailliert die Bewegung der Platte studieren, die bei Anregung durch eine Punktkraft auftritt (Kapitel 7.2). Dies ist interessant, weil der Antrieb in elektroakustischen Wandlern oft näherungsweise punktförmig oder in Form eines Kreisringes erfolgt.
Die Punktimpedanz (also die „Eingangsimpedanz" an der Anregestelle im Fall einer Punktanregung) wird ebenso hergeleitet wie die Wellenimpedanz der Kirchhoff-Platte (siehe Kapitel 7.3 und 7.4). Die Wellenimpedanz werden wir in Kapitel 8.2 benötigen, wo wir unter Nutzung der Methode aus Kapitel 5.4 die Schallabstrahlung vom Manger-Schallwandler berechnen werden.

7.1 Biegewellenausbreitung auf der Kirchhoff-Platte

Wir wollen zunächst einmal einen allgemeinen Überblick über die Wellenbewegung auf der Kirchhoff-Platte gewinnen. Dazu gehen wir von der zu Gleichung 6.16 gehörigen homogenen Differentialgleichung aus

$$\Delta\Delta\zeta + \frac{m'}{B}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0 \tag{7.1}$$

und fragen nach Lösungen, die harmonischen ebenen Wellen entsprechen. Wir betrachten nun ebene Wellen, die sich in x-Richtung ausbreiten, setzen also an:

$$\underline{\zeta}(x,t) = \hat{\zeta} \cdot e^{j(\omega t - k_B x)}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die in die homogene Plattengleichung (Gleichung 7.1) ein. Dabei ist zu beachten, dass jede zeitliche Differentiation gleichbedeutend

mit einem Faktor $j\omega$, jede örtliche Differentiation mit einem Faktor $-jk_B$ vor der Schwingungsgröße $\underline{\zeta}$ ist. Man erhält so:

$$\boxed{k_B^4 = \frac{\omega^2\, m'}{B}} \tag{7.2}$$

bzw. $k_B^2 = \pm\sqrt{\omega^2 m'/B}$.

Für das positive Vorzeichen ergibt sich:

$$(k_B)_{1,2} = \pm\sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{B}}$$

Für das negative:

$$(k_B)_{3,4} = \pm j\sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{B}}$$

Die höhere Ordnung der Differentialgleichung bedingt also eine größere Anzahl möglicher Lösungen der Biegewellengleichung gegenüber der klassischen Wellengleichung.
Die reellen Biegewellenzahlen führen dabei (in den Ansatz Gleichung 7.1 eingesetzt) zu wellenartigen Lösungen (Fernfeldlösungen). Die imaginären hingegen führen zu Nahfeldlösungen, ähnlich denen, die wir bereits in Kapitel 5 auf Seite 41 bei der Diskussion der Abstrahlung von ebenen Strahlern kennengelernt haben.
Bei den Lösungen mit reellen Biegewellenzahlen ist folgendes Phänomen zu bemerken: Die Wellenzahl ist nicht direkt proportional zur Frequenz. Die Phasengeschwindigkeit

$$c_{B,ph} = \frac{\omega}{k_B} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \tag{7.3}$$

ist also nicht frequenzunabhängig. Das bedeutet, dass einzelne Wellen unterschiedlicher Frequenz sich unterschiedlich schnell auf der Platte ausbreiten! Dieses Phänomen nennt man **Dispersion**.

Für die Ausbreitung einer so genannten „Wellengruppe“ ist allerdings die Gruppengeschwindigkeit c_{gr} auschlaggebend. Eine Wellengruppe ist die Überlagerung von beliebig vielen Wellenzügen benachbarter Frequenz. Die Hüllkurve einer solchen Überlagerung breitet sich eben mit der Gruppengeschwindigkeit fort. Diese ist als der Differentialquotient von ω und k definiert:

$$c_{B,gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k_B} = 2\,\sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \tag{7.4}$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Biegewellen ist doppelt so groß wie ihre Phasengeschwindigkeit. Die Zusammenhänge sind in Abbildung 7.1 auf der nächsten Seite illustriert.

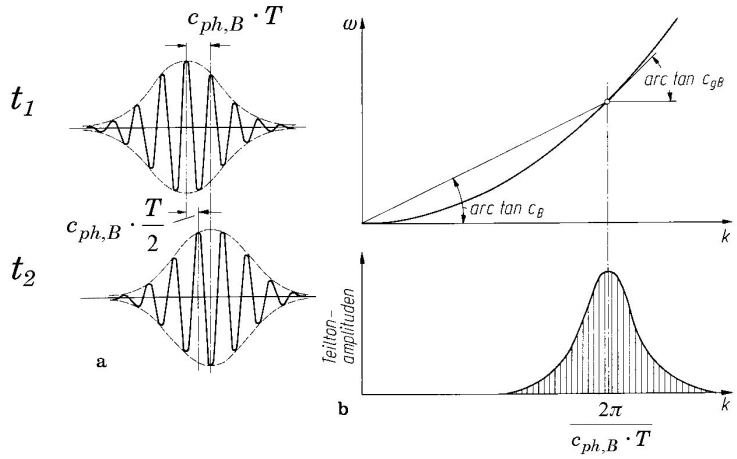


Abbildung 7.1: Beispiel, um den Unterschied zwischen Phasengeschwindigkeit $c_{ph,B}$ und Gruppengeschwindigkeit c_{gB} zu zeigen (aus [Cremer und Heckl 1995], S.102)

Diese Zusammenhänge gelten allerdings nicht für beliebig hohe Frequenzen, sondern nur für Frequenzen bei denen die Biegewellenlänge groß ist im Vergleich zur Plattendicke. Bei höheren Frequenzen (kleineren Biegewellenlängen) ist die Kirchhoffsche Plattengleichung nicht mehr gültig. Man muss dann Korrekturterme zur Berücksichtigung von endlicher Schubsteife und Drehträgheiten einführen (Mindlinsche Plattengleichung). Es kommt zur Schubwellenausbreitung auf der Platte. Schubwellen weisen im Gegensatz zu Biegewellen *keine* Dispersion auf.

Die zu den imaginären Werten $(k_B)_{3,4}$ gehörenden Lösungen $\underline{\zeta}(x,t)$ stellen keine sich ausbreitenden Wellen dar, sondern überall gleichphasige harmonische Schwingungen, deren Amplitude mit wachsendem x exponentiell zu- oder abnimmt. Im Zusammenhang mit der Ausbreitung freier Biegewellen kann man solche exponentiellen Nahfelder außer acht lassen. Man benötigt sie indessen, wenn an den Rändern der Platte bestimmte Randbedingungen zu erfüllen sind. Auch in der Nähe einer Biegewellenquelle (etwa bei punktförmiger Anregung) oder auf Grund von Inhomogenitäten der Platte treten sie in Erscheinung.

7.2 Transversale Bewegung bei Anregung durch eine Punktkraft

Wie bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit gesagt wurde, werden wir den Manger-Schallwandler als unendliche Platte behandeln. Wir leiten in diesem Kapitel die Lösung für erzwungene Biegeschwingungen einer unendlich ausgedehnten Platte her. Zur Bestimmung einer solchen Lösung gehen wir von der **Wellengleichung für die**

Kirchhoff-Platte aus (Gleichung 6.16 auf Seite 69 aus Kapitel 6):

$$\Delta\Delta\zeta + \frac{m'}{B}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{p}{B} \tag{7.5}$$

Wie gehabt mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B &= \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{h^3}{12} && \ldots \text{ Biegesteife der Platte } [Nm] \\ m' &= \rho\cdot h && \ldots \text{ Massenbelag } [kg/m^2] \end{aligned}$$

Es sollen nun die Biegeschwingungen einer solchen unendlich ausgedehnten Platte betrachtet werden, die o.B.d.A.[1] durch eine im Ursprung angreifende, harmonisch veränderliche Einzelkraft $\hat{F}\cdot e^{j\bar{\omega}t}$ angeregt werden. Die sich einstellenden Biegewellen müssen dann zum Ursprung radialsymmetrisch verlaufen. Wir werden also auf Zylinderkoordinaten übergehen.

Setzen wir zunächst den Kraftterm in die Plattengleichung ein:

$$\Delta\Delta\zeta + \frac{m'}{B}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\hat{F}}{B}\cdot\delta(r) \tag{7.6}$$

Die Lösung einer solchen inhomogenen Plattengleichung ist mathematisch schwierig und sie lässt sich auf ein Randwert-Problem für die homogene Plattengleichung zurückführen.

Wir lösen also die zu Gleichung 7.6 gehörige homogene Differentialgleichung unter Verwendung folgender **Rand- bzw. Regularitätsbedingungen** (siehe [Cremer und Heckl 1995], S. 279 ff.):

1. Wir suchen nur Lösungen, die *abstrahlende* Wellen darstellen, die im Unendlichen abklingen (dies ist die so genannte „Sommerfeldsche Austrahlungsbedingung“, eine uneigentliche Randbedingung)

2. An der Anregestelle treten keine Drehbewegungen auf, d.h. am Ort der Anregung ist die erste Ableitung von $\underline{\zeta}$ nach dem Ort gleich Null:

   $$\frac{\partial\zeta}{\partial r} = 0$$

   Eine an die Wellenform angelegte Tangente an diesem Punkt bleibt also immer parallel zur ursprünglichen Plattenebene gerichtet. (Das bedeutet gleichzeitig, dass die Amplitude endlich bleibt.)

[1] o.B.d.A. = „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“. Gemeint ist hier der Umstand, dass bei einer unendlich ausgedehnten Platte der Ursprung als Kraftangriffspunkt ohne Verletzung der Allgemeingültigkeit gewählt werden kann, da in Bezug auf das Unendliche jede endliche Translation irrelevant ist.

3. An der Anregungsstelle $r = 0$ soll die anregende Kraft gleich der Summe der Querkräfte sein:
$$\sum Q_r = \hat{F}$$

Wir schreiben zunächst wieder die **homogene Differentialgleichung** an, um die allgemeine Lösung zu finden. Dabei setzen wir die Verschiebung in z-Richtung ($\zeta(r,t)$) komplex an

$$\underline{\zeta} = \zeta(r) \cdot e^{j\omega t}$$

und setzen sie in die Plattengleichung ein. Das führt zu folgender Gleichung:

$$\Delta\Delta\underline{\zeta} + k_B^4 \cdot \underline{\zeta} = 0 \tag{7.7}$$

Dabei haben wir wieder den entsprechenden Ausdruck durch die Biegewellenzahl k_B ersetzt.

Die homogene partielle Differentialgleichung 4. Ordnung 7.7 lässt sich in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufspalten. Aus [Parkus 1983], S. 259, kann man entnehmen, dass jede Lösung einer der beiden Gleichungen

$$\Delta\underline{\zeta} + k_B^2 \cdot \underline{\zeta} = 0 \tag{7.8a}$$
$$\Delta\underline{\zeta} - k_B^2 \cdot \underline{\zeta} = 0 \tag{7.8b}$$

auch eine Lösung von Gleichung 7.7 ist.

Der Laplace-Operator lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{7.9}$$

Damit werden die Gleichungen 7.8a und 7.8b zu

$$k_B^2 r^2 \cdot \frac{\partial^2 \underline{\zeta}}{\partial(k_B^2 r^2)} + k_B r \cdot \frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial(k_B r)} + k_B^2 r^2 \underline{\zeta} = 0 \tag{7.10a}$$
$$k_B^2 r^2 \cdot \frac{\partial^2 \underline{\zeta}}{\partial(k_B^2 r^2)} + k_B r \cdot \frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial(k_B r)} - k_B^2 r^2 \underline{\zeta} = 0 \tag{7.10b}$$

Diese Typen von Differentialgleichungen und deren Lösungen sind hinlänglich bekannt: Es sind nämlich die Besselsche Differentialgleichung (7.10a) und die modifizierte Besselsche Differentialgleichung (7.10b), deren Lösungen, wie zu erwarten war, aus Zylinderfunktionen bestehen.

Die *allgemeine Lösung der ersten Gleichung* (7.10a) lautet

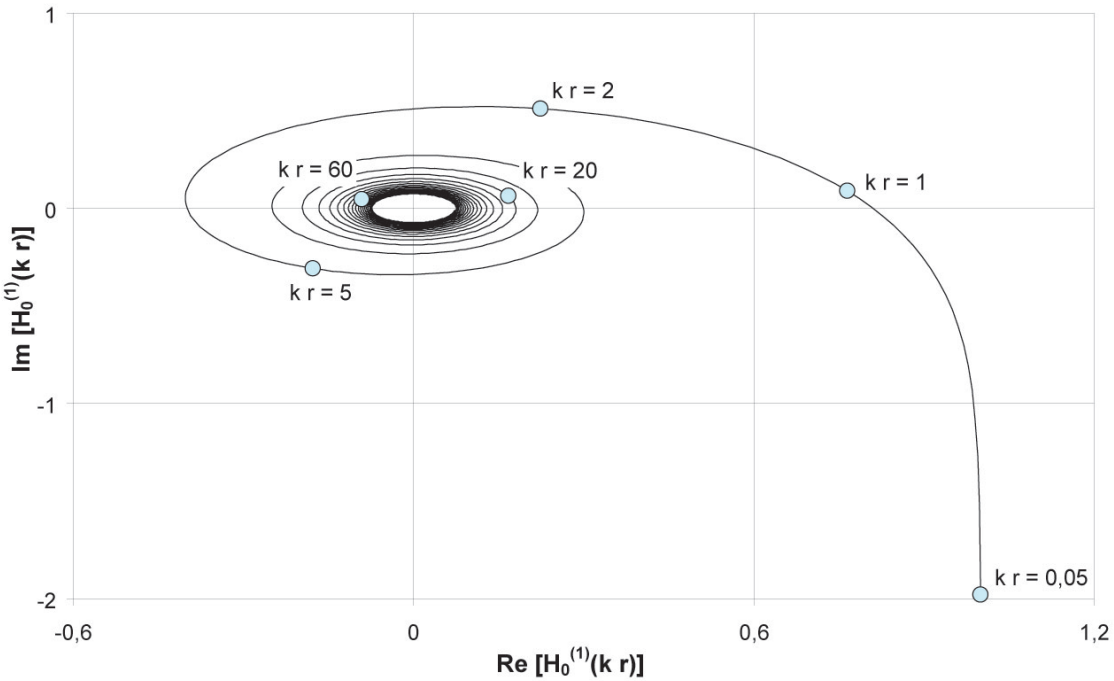


Abbildung 7.2: Hankel-Funktion erster Art der Ordnung 0 (aus [Altrichter 1999])

$$\begin{aligned}
&\underline{\zeta}_1 = \underline{C}_1\, \underline{H}_0^{(1)}(k_B r) + \underline{C}_2\, \underline{H}_0^{(2)}(k_B r) \\
&\text{mit} \\
&\underline{H}_0^{(1)} \ldots 1.\ \text{Hankel-Funktion, 0. Ordnung} \\
&\underline{H}_0^{(2)} \ldots 2.\ \text{Hankel-Funktion, 0. Ordnung}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

(siehe auch Anhang D auf Seite 139).

Jetzt aber können wir die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (Randbedingung 1) ins Spiel bringen! Da wir als Lösung nur an ausstrahlenden Wellen interessiert sind, kommt nur die zweite Hankel-Funktion 0. Ordnung als Lösung des Problems in Frage, weil die Phase mit wachsendem Abstand zur Anregestelle immer kleiner wird (siehe Abbildung 7.2). Hingegen weist die erste Hankel-Funktion eine mit abnehmender Entfernung zunehmende Phase auf, stellt also eine rücklaufende Welle dar (siehe Abbildung 7.3). Die Lösung unter der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung reduziert sich somit zu:

$$\underline{\zeta}_1 = \underline{C}_1\, \underline{H}_0^{(2)}(k_B r) \tag{7.12}$$

Die *allgemeine Lösung der zweiten Differentialgleichung* (7.10b) ist ebenfalls bekannt und lautet:

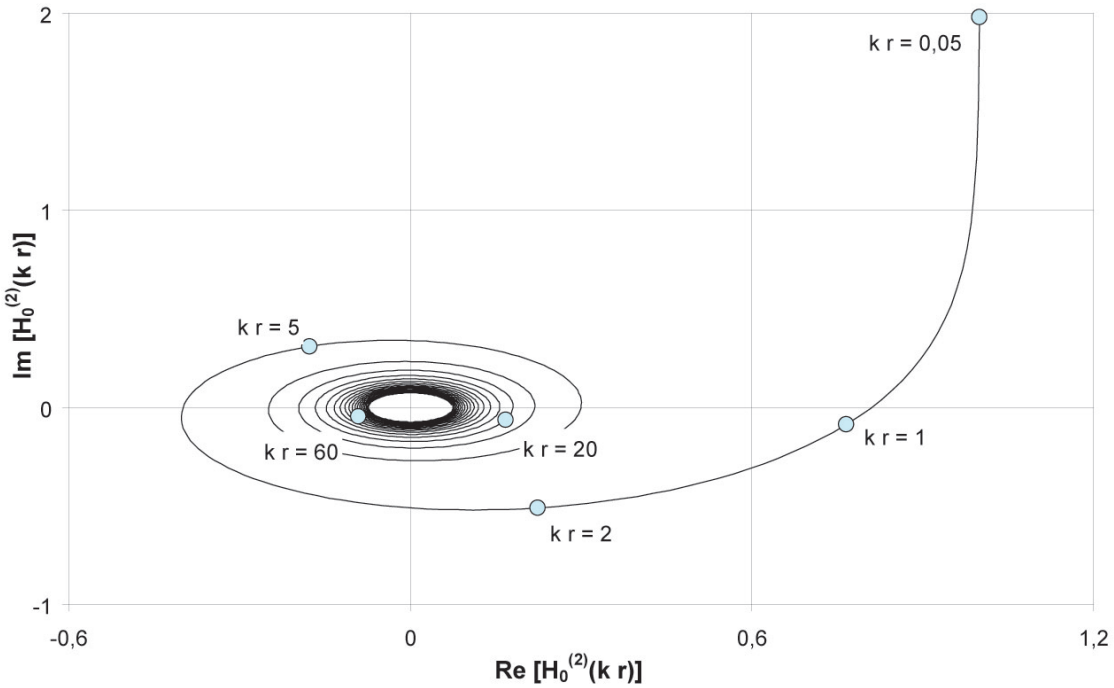


Abbildung 7.3: Hankel-Funktion zweiter Art der Ordnung 0 (aus [Altrichter 1999])

$$\begin{aligned}
&\underline{\zeta}_2 = \underline{C}_1\, I_0(k_B r) + \underline{C}_2\, K_0(k_B r) \\
&\text{mit} \\
&I_0(k_B r) \ldots \text{modifizierte Bessel-Funktion 1. Art, 0. Ordnung} \\
&K_0(k_B r) \ldots \text{modifizierte Bessel-Funktion 2. Art, 0. Ordnung}
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Genau wie oben kann argumentiert werden, dass wegen der Ausstrahlungsbedingung nur die modifizierte Bessel-Funktion 2. Art (K_0) als Lösung in Frage kommen kann, weil nur sie im Unendlichen abklingt:

$$\underline{\zeta}_2 = \underline{C}_1\, K_0(k_B r) \tag{7.14}$$

Diese aber kann man folgendermaßen durch eine zweite Hankel-Funktion ausdrücken:

$$K_0(x) = -j\frac{\pi}{2}\underline{H}_0^{(2)}(-jx) \tag{7.15}$$

Aus Gleichung 7.12 auf der vorherigen Seite und Gleichung 7.14 ergibt sich damit die *Gesamtlösung für die Verschiebung* in z-Richtung (ζ) unter Berücksichtigung der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung:

$$\begin{aligned}
&\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_1 + \underline{\zeta}_2 \\
&\underline{\zeta} = \underline{C}_1\, \underline{H}_0^{(2)}(k_B r) + \underline{C}_2\, \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

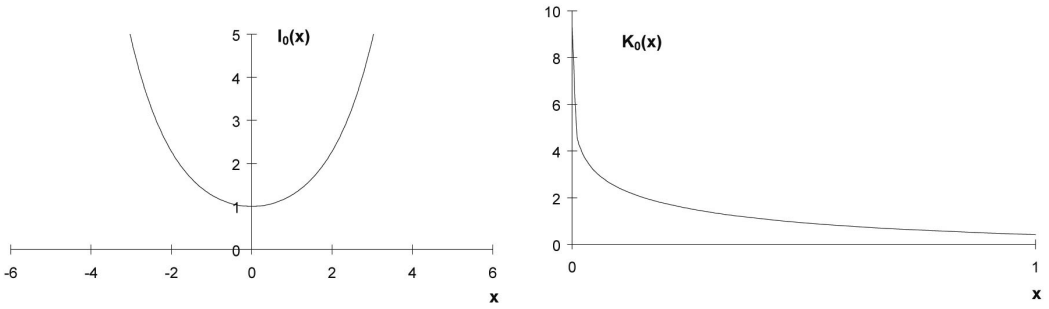


Abbildung 7.4: Modifizierte Bessel-Funktionen 1. Art, 0. Ordnung (I_0) und 2. Art, 0. Ordnung (K_0) (aus [Altrichter 1999])

Die Gesamtlösung besteht somit aus 2 Teillösungen. Ähnlich wie im Fall der Schallabstrahlung eines ebenen Strahlers (siehe Kapitel 5 auf Seite 41) gibt es einen Anteil, der ein Nahfeld darstellt und einen Anteil, der einer auslaufenden Welle entspricht. Nur diesmal sind dies die Wellen, die sich vom Ort der Anregung entlang der Platte fortpflanzen.

Zur Berechnung der *speziellen Lösung* werden nun die verbleibenden Randbedingungen herangezogen. Zunächst fordern wir, dass die Ableitung von $\underline{\zeta}$ an der Anregungsstelle verschwinden muss (Randbedingung 2).
Für den Bereich um die Stelle der Anregung verwenden wir nun eine *Näherung der Hankel-Funktion für kleine Argumente*:

$$\begin{aligned} &\underline{H}_0^{(2)}(x) \approx 1 - j\frac{2}{\pi}\left(e + \ln\frac{x}{2}\right) \qquad \text{für} |x| << 1 \\ &e \ldots \text{Eulersche Konstante (C=1,781072418...)} \end{aligned} \tag{7.17}$$

Diese Näherung erhält man aus einer Näherung der Bessel-Funktion (J_0) und Neumann-Funktion (Y_0) für kleine Argumente.
Wir nutzen diese Näherung und setzten die Ableitung von $\underline{\zeta}$ nach r Null:

$$\begin{aligned} &\underline{\zeta} = \underline{C}_1\left[1 - j\frac{2}{\pi}\left(e + \ln\frac{k_B r}{2}\right)\right] + \underline{C}_2\left[1 - j\frac{2}{\pi}\left(e + \ln\frac{-jk_B r}{2}\right)\right] \\ &\frac{\partial\underline{\zeta}}{\partial r} = -\underline{C}_1\frac{2j}{\pi}\frac{2}{k_B r}\frac{k_B}{2} - \underline{C}_2\frac{2j}{\pi}\frac{2}{-jk_B r}\frac{-jk_B}{2} = -\frac{2j}{\pi r}\left(\underline{C}_1 + \underline{C}_2\right) = 0 \\ &\Rightarrow \underline{C}_1 = -\underline{C}_2 = \underline{C} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Daraus folgt:

$$\underline{\zeta} = \underline{C}\left[\underline{H}_0^{(2)}(k_B r) - \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r)\right] \tag{7.19}$$

Nun setzen wir in dieser Gleichung für $r = 0$ die Auslenkung $\underline{\zeta_0}$ ein und benutzen dabei wieder die asymptotischen Näherungen. Damit ergibt sich:

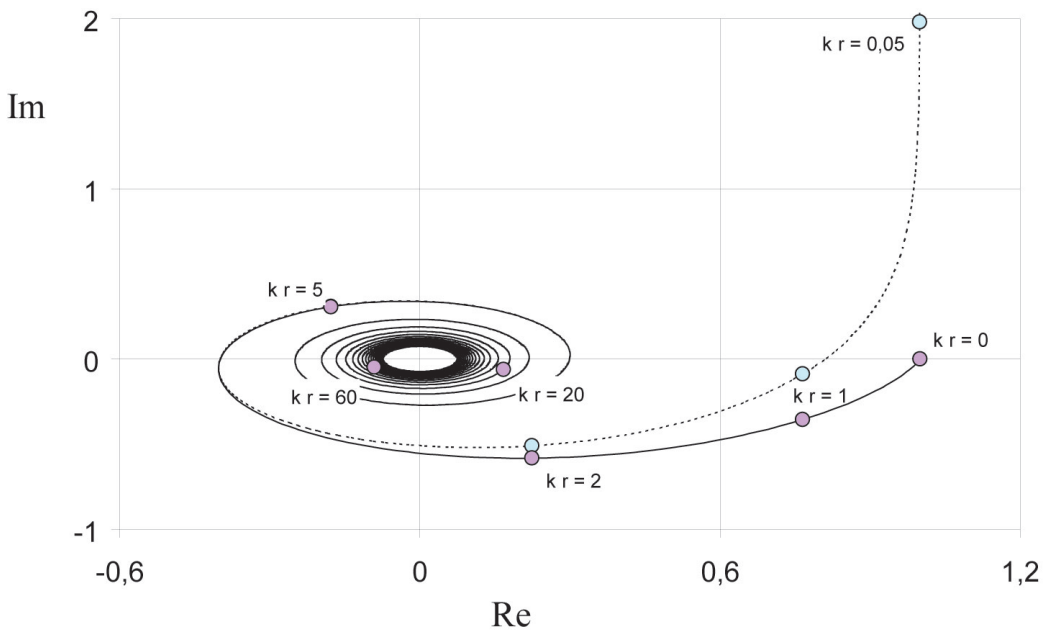


Abbildung 7.5: Ausbreitungsfunktion $\underline{\Pi}$ der Kirchhoff-Platte, punktiert: $\underline{H}_0^{(2)}$ (aus [Altrichter 1999])

$$
\begin{aligned}
&\underline{\zeta}(0) = \underline{\zeta}_0 = \\
&= \underline{C}\left\{1 - j\frac{\pi}{2}\left(e + \ln\frac{k_B r}{2}\right) - \left[1 - j\frac{\pi}{2}\left(e + \ln\frac{k_B r}{2}\right) - j\frac{2}{\pi}\ln(-j)\right]\right\} \\
&= \underline{C}\, j\frac{2}{\pi}\ln\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{=-j} = \underline{C}\cdot j\frac{2}{\pi}\cdot -j\frac{\pi}{2} = \underline{C} = \underline{\zeta}_0
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Für die Auslenkung $\underline{\zeta}$ in transversaler Richtung (z) erhält man daher:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\underline{\zeta} = \underline{C}\cdot\left[\underline{H}_0^{(2)}(k_B r) - \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r)\right] = \underline{\zeta}_0\cdot\underline{\Pi}(k_B r) \\
&\underline{\Pi}(k_B r)\ \ldots\,\text{Ausbreitungsfunktion}
\end{aligned}}
\tag{7.21}
$$

Diese Ausbreitungsfunktion als Differenz der Hankel-Funktionen (siehe Abb. 7.5) beschreibt die Form der Schwingung auf der Platte bei einer Auslenkung $\underline{\zeta}_0$ im Zentrum der Platte. Das Schwingungsbild der Platte für verschiedene Zeitpunkte ist in Abbildung 7.6 auf der nächsten Seite zu sehen, eine 3D-Darstellung der angeregten Platte in Abbildung 7.7 auf Seite 81.

Die unbekannte Auslenkung $\underline{\zeta}$ bei $r = 0$ ($\underline{\zeta}_0$) können wir unter Verwendung der verbliebenen Randbedingung 3 bestimmen. Zur Berücksichtigung dieser letzten ver-

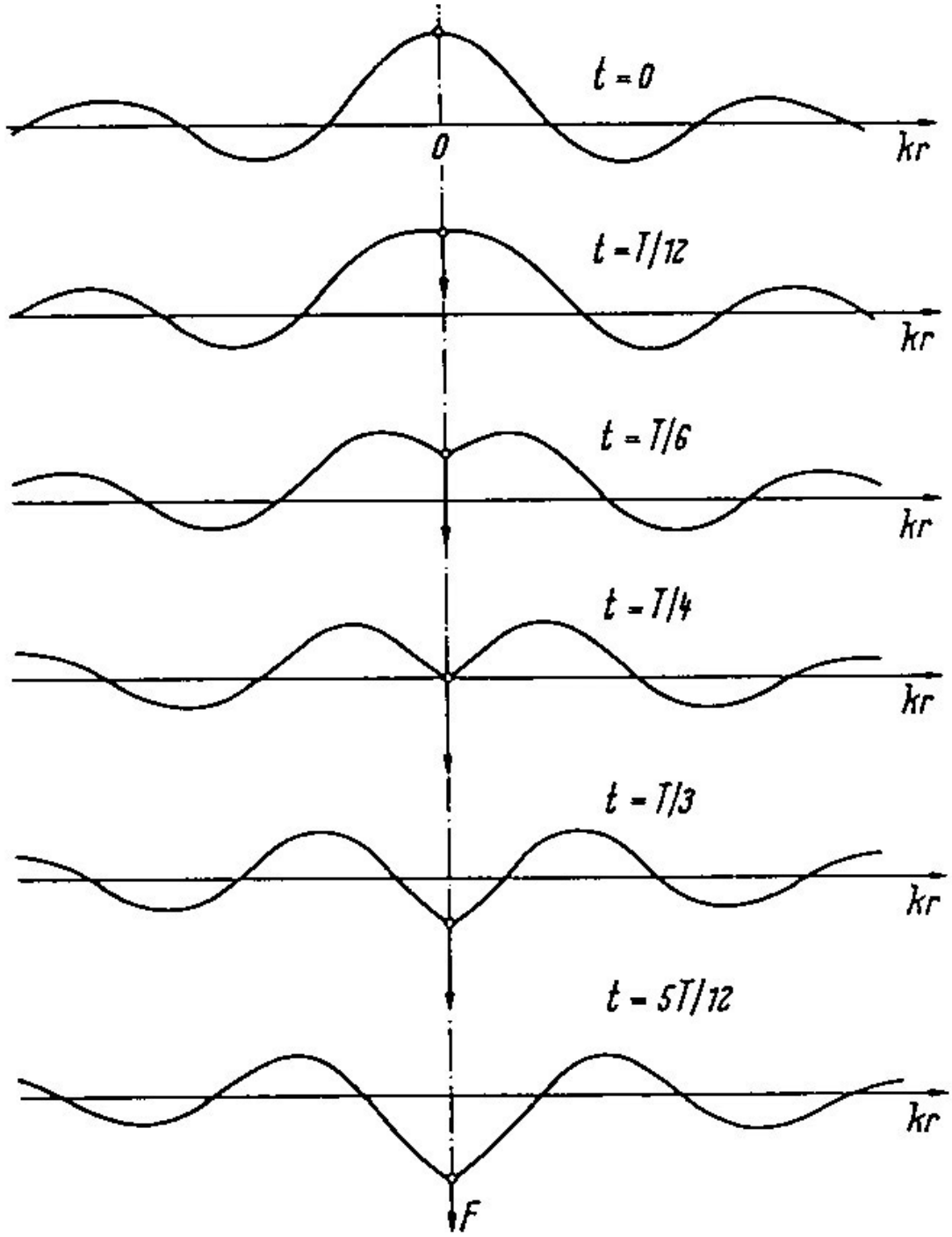


Abbildung 7.6: Bewegungsverlauf der Kirchhoff-Platte bei punktförmiger Anregung (aus [Cremer und Heckl 1995], S.282)

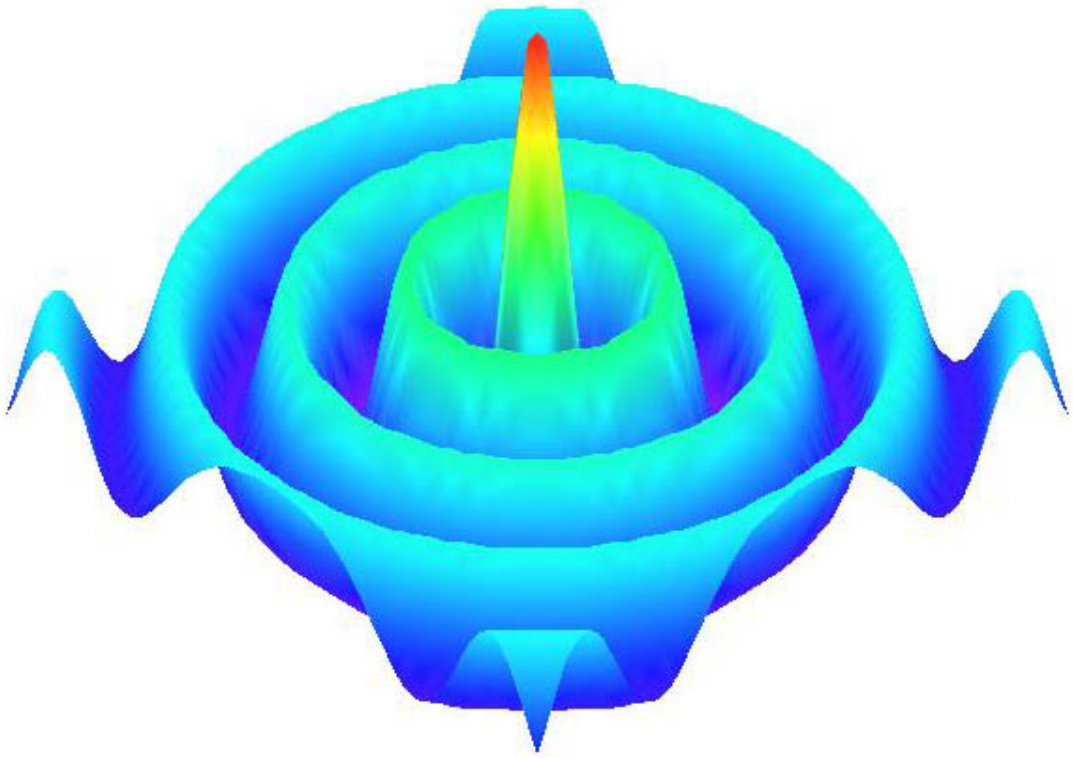


Abbildung 7.7: 3D-Darstellung eines rechteckigen Ausschnittes der unendlichen Kirchhoff-Platte bei punktförmiger Anregung

bleibenden Randbedingung müssen die Querkräfte in der Platte an der Anregestelle als Funktionen der Auslenkung in z-Richtung ($\underline{\zeta}$) ermittelt werden.
Die auf die Fläche bezogenen Querkräfte werden aus den Gleichungen 6.12 und 6.13 auf Seite 68 durch Einsetzen der Gleichungen 6.9 auf Seite 65 ausgerechnet. Schließlich können diese auf Grund der bestehenden Rotationssymmetrie durch eine nur vom Abstand r abhängige Querkraft q_r ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
\underline{q}_x &= \frac{\partial \underline{m}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{m}_{xx}}{\partial x} = \frac{B}{h}\left[\mu\,\frac{\partial^3 \underline{\zeta}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \underline{\zeta}}{\partial y^3} + (1-\mu)\,\frac{\partial^3 \underline{\zeta}}{\partial x^2 \partial y}\right] = \frac{B}{h}\,\frac{\partial\,\Delta\underline{\zeta}}{\partial y} \\
\underline{q}_y &= \frac{\partial \underline{m}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{m}_{yy}}{\partial y} = \frac{B}{h}\left[\mu\,\frac{\partial^3 \underline{\zeta}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \underline{\zeta}}{\partial x \partial y^2} + (1-\mu)\,\frac{\partial^3 \underline{\zeta}}{\partial x \partial y^2}\right] = \frac{B}{h}\,\frac{\partial\,\Delta\underline{\zeta}}{\partial x} \\
\Rightarrow\ \underline{q}_r &= \frac{B}{h}\,\frac{\partial\,\Delta\underline{\zeta}}{\partial r}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Nun müssen wir die Ableitung von $\Delta\underline{\zeta}$ nach r aufstellen. Dazu muss, ausgehend von Gleichung 7.21 auf Seite 79, die 2. Ableitung der Hankel-Funktion gebildet werden. Mit den Gleichungen 7.8a und 7.8b, die ja für die angenommenen Randbedingungen durch die Hankel-Funktionen erfüllt werden, gilt

$$\begin{aligned}
&\Delta\underline{H}_0^{(2)}(k_B r) = -k_B^2 \underline{H}_0^{(2)}(k_B r) \\
&\Delta\underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r) = k_B^2 \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r) \\
&\Delta\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_0\left[\underline{H}_0^{(2)}(k_B r) - \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r)\right] \\
&\frac{\partial \Delta\underline{\zeta}}{\partial r} = -\underline{\zeta}_0 k_B^2\left[\frac{\partial \underline{H}_0^{(2)}(k_B r)}{\partial r} + \frac{\partial \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r)}{\partial r}\right]
\end{aligned} \tag{7.23}$$

bzw. ergibt sich durch Einsetzen der asymptotischen Näherung für kleine Argumente:

$$\frac{\partial\,\Delta\underline{\zeta}}{\partial r} = \frac{4j}{\pi r}\,k_B^2 \underline{\zeta}_0 \tag{7.24}$$

Um die Summe der Querkräfte mit der anregenden Kraft am Ort der Anregung gleichsetzen zu können, bedient man sich eines Tricks. Weil die Querkraft im Ursprung singulär wird, denkt man sich die anregende Kraft auf der Fläche eines kleinen Kreises mit dem Radius r_0 um den Nullpunkt angreifend. Die Abmessungen des Kreises sollten den Ansprüchen genügen, die bei der Diskussion der Punktimpedanz im Anhang diskutiert werden (Anhang B.1.1 auf Seite 133).
Die Querkräfte werden entlang der Mantelfläche der so entstehenden Scheibe, auf deren Oberfläche die Kraft angreift, aufsummiert, d.h. mit dem Umfang $2\pi r_0$ und der Höhe h multipliziert und der anregenden Kraft betragsmäßig gleichgesetzt:

$$\sum \underline{q}_r = 8j\,k_B^2\,\underline{\zeta}_0 B \stackrel{!}{=} \underline{F}_a \tag{7.25}$$

Daraus folgt für die gesuchte Auslenkung (Amplitude) der Kirchhoff-Platte im Punkt der Anregung:

$$\boxed{\underline{\zeta}_0 = \frac{\underline{F}_a}{8jk_B^2 B}} \tag{7.26}$$

7.3 Punktimpedanz der Kirchhoff-Platte

Wie dem Anhang zu entnehmen ist (Anhang B auf Seite 133), ist die Punktimpedanz definiert als das komplexe Verhältnis von Kraft zu Schnelle am Punkt der Anregung. Durch einmalige zeitliche Ableitung von $\underline{\zeta}_0$ erhält man die transversale Schnelle $\underline{v}_z(0)$ zu $\underline{v}_z(0) = j\omega\underline{\zeta}_0$. Setzt man die anregende Kraft $\underline{F}_a$ aus Gleichung 7.25 ins Verhältnis zu dieser Schnelle, dann erhält man die Punktimpedanz (mechanische Eingangsimpedanz) der Kirchhoff-Platte:

$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{F}_a}{j\omega\underline{\zeta}_0} = \frac{8jk_B^2\underline{\zeta}_0 B}{j\omega\underline{\zeta}_0} = \frac{8Bk_B^2}{\omega} \tag{7.27}$$

Mit

$$k_B^2 = \omega\sqrt{\frac{m'}{B}} \tag{7.28}$$

(siehe Gleichung 7.2 auf Seite 72) folgt daraus:

$$\boxed{Z_p = 8\sqrt{B\,m'}} \tag{7.29}$$

Die Eingangsimpedanz der Kirchhoff-Platte ist also erstaunlicherweise von sehr einfacher Form und rein reell!

7.4 Wellenimpedanz der Kirchhoff-Platte

Ebenfalls dem Anhang zu entnehmen ist die Definition der Wellenimpedanz (Anhang B auf Seite 133). Die Wellenimpedanz ist als das Verhältnis von anregendem Druck zu erzeugter Schnelle mit *gleicher räumlicher Verteilung* definiert. Wir gehen zur Berechnung, wie üblich, zur Zeigerschreibweise über. Für die Wellenimpedanz folgt dann:

$$\underline{Z}_W = \frac{\underline{p}_0}{\underline{v}_0}$$

mit

$\underline{p}(x,y) = \underline{p}_0 \cdot g(x,y)$

$\underline{v}(x,y) = \underline{v}_0 \cdot g(x,y)$

$g(x,y)$ ... Hilfsgröße (beliebige Funktion in x und y)

Für die weitere Berechnung gehen wir von der inhomogenen Biegewellengleichung der Kirchhoff-Platte aus (siehe auch [Cremer und Heckl 1995], S. 285 ff.):

$$B\,\Delta\Delta\zeta(x,y,t) + m'\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\zeta(x,y,t) = p(x,y,t)$$

Wir gehen nun auch hier zur Zeigerschreibweise über und nutzen den bereits bekannten komplexen Ansatz für den Druck:

$$\underline{p}(x,y) = \underline{p}(k_x,k_y)\,e^{-jk_x x}\,e^{-jk_y y}$$

mit

$k_x \ldots$ Wellenzahl in x-Richtung $[m^{-1}]$

$k_y \ldots$ Wellenzahl in y-Richtung $[m^{-1}]$

$\underline{p}(k_x,k_y) \ldots$ Wellenzahlspektrum des Drucks $[N/m^2]$

Wir betrachten also eine ebene Welle, die durch eine harmonische Schwingung erzeugt wurde.

Für die Schnelleverteilung auf der Platte soll ja definitionsgemäß die gleiche Verteilung wie für den Druck vorliegen (also ebenfalls eine ebene Welle, die aus einer harmonischen Schwingung hervorgegangen ist):

$$\underline{v}(x,y) = \underline{v}(k_x,k_y)\,e^{-jk_x x}\,e^{-jk_y y}$$

Diesen Ansatz darf man aber nur dann benutzen, wenn die Platte unendlich ausgedehnt ist und keine Diskontinuitäten oder Inhomogenitäten vorliegen. Denn dann (und nur dann) sind die örtlichen Verteilung der Plattenschnelle und die des anregenden Drucks gleich.

Geht man innerhalb der Biegewellengleichung der transversalen Verschiebung ζ durch zeitliche Integration auf die Biegewellengleichung der transversalen Schnelle v über, kann man die Wellenimpedanz leicht anschreiben. Wir nutzen wiederum die Zeigerschreibweise:

$$\underline{\zeta} = \frac{\underline{v}}{j\omega} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \underline{v}(x,y) - k_B^4\,\underline{v}(x,y) = \frac{j\omega}{B'}\,\underline{p}(x,y)$$

$$\left[(k_x^2+k_y^2)^2 - k_B^4\right]\,\underline{v}(k_x,k_y) = \frac{j\omega}{B}\,\underline{p}(k_x,k_y) \Rightarrow$$

Formt man nun noch um, erhält man für die Wellenimpedanz der unendlichen Kirchhoff-Platte folgenden Ausdruck:

$$\boxed{\underline{Z}_W = \frac{\underline{p}(k_x,k_y)}{\underline{v}(k_x,k_y)} = \frac{B}{j\omega}\,\left[(k_x^2+k_y^2)^2 - k_B^4\right] = j\omega m'\left[1 - \frac{(k_x^2+k_y^2)^2}{k_B^4}\right]} \qquad (7.30)$$

7.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir zunächst gesehen, dass Biegewellen Dispersion aufweisen (Kapitel 7.1). Dann haben wir die Wellenbewegung bei Anregung durch eine Punktkraft studiert (Kapitel 7.2). Es zeigte sich, dass sich einerseits auf der Platte, ausgehend von der Anregestelle, Wellen ausbreiten und andererseits in der Nähe der Anregestelle ein exponentiell abklingedes Biegewellennahfeld auftritt.
Außerdem haben wir gesehen, dass die Punktimpedanz an der Anregestelle rein reell ist - die anregende Kraft und die durch sie erzeugte Plattenschnelle sind zueinander proportional (Kapitel 7.3). Am Ende haben wir noch die Wellenimpedanz der unendlichen Platte hergeleitet (Kapitel 7.4), die wir benutzen werden, um die Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers näherungsweise zu berechnen.

Im nächsten Kapitel werden wir die Abstrahlung ebener Biegewellenwandler diskutieren und dann unter Nutzung der Wellenimpedanz der unendlichen Platte die Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers durchführen.

Kapitel 8

Schallabstrahlung vom ebenen Biegewellen-Schallwandler

In diesem Abschnitt betrachten wir die Abstrahlung von ebenen Biegewellen-Schallwandlern.
In Kapitel 8.1 geben wir zunächst einen Überblick über die Schallabstrahlung solcher Schallwandler. Anhand von Beispielen aus Literaturquellen soll dabei zunächst ein Gefühl für den Zusammenhang von Wellenzahlspektrum der Strahlerschnelle und Richtwirkung des Strahlers entwickelt werden. In weiterer Folge werden prinzipielle Möglichkeiten bzw. Ursachen der Schallabstrahlung endlicher und unendlicher Platten erläutert (Kapitel 8.1.1). Dann wollen wir auf dieser Basis theoretisch mögliche, aber auch kommerziell verfügbare Designvarianten diskutieren (Kapitel 8.1.2).
In Kapitel 8.2 werden wir die Schallabstrahlung vom Manger-Schallwandler unter Nutzung der Hankel-Transformation (radiales Wellenzahlspektrum) berechnen. Wir modellieren den Manger-Schallwandler allerdings in erster Näherung als unendliche Kirchhoff-Platte (Kapitel 8.2.1). Auf Grund dieser Vereinfachung kann man die Methode aus Kapitel 5.4 zur Berechnung der Abstrahlung von der Platte heranziehen. Abschließend wird die Lösung diskutiert (Kapitel 8.2.2). Der Vollständigkeit halber werden auch verfügbare Messergebnisse vom Manger-Schallwandler angegeben.

8.1 Schallabstrahlung endlicher Platten

8.1.1 Allgemeines

Wie wir in Kapitel 5 gesehen haben, wird die Schallabstrahlung von ebenen Strahlern sehr anschaulich durch das Wellenzahlspektrum der Strahlerschnelle bestimmt (Gleichung 5.11 auf Seite 50). Eine einzelne, ebene Welle in der unendlichen Platte führt dabei nur oberhalb der Koinzidenzfrequenz zu einer Welle in der Luft. Diese Welle ist dann aber ebenfalls eben und schließt mit der Strahlerfläche einen bestimmten Winkel ein, der vom Verhältnis der Wellenlänge der Biegewelle auf der Platte (λ_B) zur freien Wellenlänge in Luft (λ_0) abhängig ist (siehe auch Abb. 5.3).

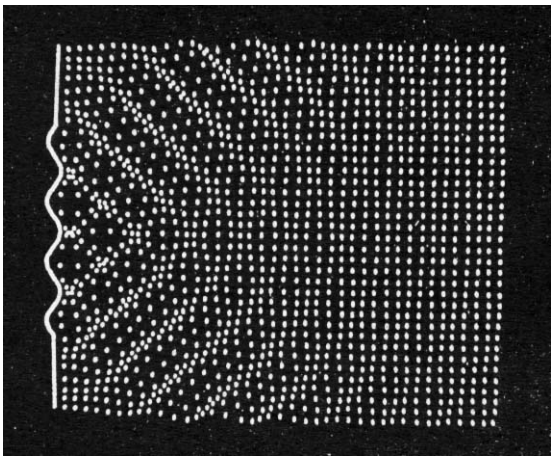


Abbildung 8.1: Teilchenbewegung im umgebenden Medium eines Strahlers mit dem Bewegungsverlauf einer stehenden Biegewelle (aus [Möser 1988], S. 11)

Eine beliebige Wellenbewegung der Strahlerfläche kann durch Fourier-Transformation in eine Überlagerung ebener Wellen zerlegt werden (Wellenzahlspektrum, siehe Kapitel5.3). Einleitend wollen wir nun einige Beispiele zu dieser Thematik bringen, damit der Leser ein besseres Gefühl für die Abstrahlung von Platten und die Nützlichkeit des Wellenzahlspektrums bekommt.

In Abbildung 8.1 ist beispielsweise die Teilchenbewegung im umgebenden Medium eines Strahlers mit dem Bewegungsverlauf einer stehenden Biegewelle (also der Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle) mit λ_B, gerechnet für $(\lambda_B/\lambda_0)^2 = 2$ und $l/\lambda_B = 3.5$, abgebildet. Das Wellenzahlspektrum des Bewegungsverlaufes besteht aus zwei Komponenten im Spektralbereich ($k = \pm k_B$), wobei jede spektrale Komponente impulsähnlich ist. Das Schallgeschehen wird deshalb von der Bildung zweier Schallstrahlen bestimmt, welche unter dem Spuranpassungswinkel erzeugt werden.

In Kapitel 7.1 auf Seite 71 haben wir gezeigt, dass an der Anregestelle und an den Rändern der Platte neben den sich ausbreitenden Biegewellen auch exponentielle Nahfelder entstehen können. In Abbildung 8.2 auf der nächsten Seite ist etwa der Schwingungsverlauf einer Platte zu sehen, die in ihrer Mitte durch eine Punktkraft zu Biegeschwingungen angeregt wird (gerechnet für $(\lambda_B/\lambda_0)^2 = 0.2$). Die sich hier einstellende Biegewelle ist gegenüber dem gasförmigen Medium kurzwellig. In diesem Fall wird der abgestrahlte Schall fast nur von der Platten-Verformung in unmittelbarer Umgebung der Punktkraft - dem sogenannten Biegewellennahfeld - hervorgerufen. Es ist der breitbandige Charakter des Wellenzahlspektrums dieser örtlich sehr begrenzten Verformung, der die fast ungerichtete Abstrahlung bewirkt. Der besseren Deutlichkeit halber sind die Teilchenbewegungen hier 10-fach so groß wie die Plattenbewegungen dargestellt. Falls die Frequenz der freien Biegewelle auf der Platte unterhalb der Koinzidenzfrequenz liegt, wie in diesem Beispiel, kann durch

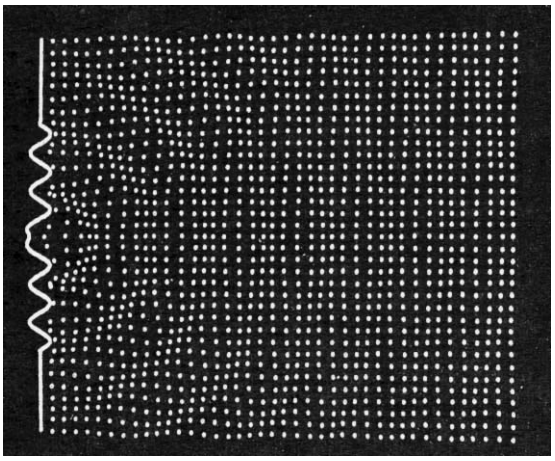


Abbildung 8.2: Teilchenbewegung im umgebenden Medium eines halbunendlichen Strahlers, der durch eine Punktkraft angeregt wird (aus [Möser 1988], S. 12)

das Biegewellennahfeld der Platte also trotzdem Schall abgestrahlt werden!

Als weiterem Beispiel wenden wir uns nun der endlichen Platte zu. In Abbildung 8.5 auf Seite 91 ist die Teilchenbewegung im umgebenden Medium eines durch eine mittige Punktkraft angeregten, an den Rändern unterstützten Biegeschwingers dargestellt. (Gerechnet für $(\lambda_B/\lambda_0)^2 = 0.44$ und $l/\lambda_B = 5.5$, Frequenz in der Mitte zwischen zwei Biegeresonanzen). Eine Halbebene schwingt mit einer kurzwelligen Biegewelle mit einem Schwingungsknoten am Rande. Hier bestimmt die Unstetigkeit in der ersten Ableitung des örtlichen Schwingungsverlaufes das Schallgeschehen, im 20-fach übertrieben abgebildeten globalen Bewegungsbild erscheint deshalb der Knick als Strahlungsquelle.
Auch Unstetigkeiten im örtlichen Verlauf führen also bei endlichen Platten zu einer Schallabstrahlung, selbst wenn die Frequenz unterhalb der Koinzidenzfrequenz liegt (ein lokal begrenzter oder unstetiger Verlauf im Ortsbereich führt zu einem breiten Wellenzahlspektrum). Solche Unstetigkeiten können durch Begrenzung des schallabstrahlenden Abschnitts einer unendlichen Platte oder durch die Begrenzungen (Ränder) einer endlichen Platte entstehen. Ist die Platte selbst endlich, entstehen an ihren Begrenzungen wiederum Biegewellennahfelder, weil dadurch die Randbedingungen erfüllt sind.

Die eben besprochenen Zusammenhänge sind in Abbildung 8.4 auf der nächsten Seite noch einmal zusammengefasst. Abbildung 8.3 auf der nächsten Seite zeigt den Abstrahlgrad einer endlichen Platte ($L/\lambda_k = 30$) bei stehenden und bei fortschreitenden Biegewellen. Der Abstrahlgrad ist der Logarithmus des Abstrahlfaktors. Dieser setzt die vom Flächenstück S einer unendlichen Platte abgestrahlte Leistung in Beziehung zu der Leistung, die von S abgestrahlt werden würde, wenn alle Plattenpunkte konphas schwingen würden (das wäre die Leistung eines Auschnittes der Fläche S einer ebene Welle, die sich in Richtung der Flächennormalen des Strahlers

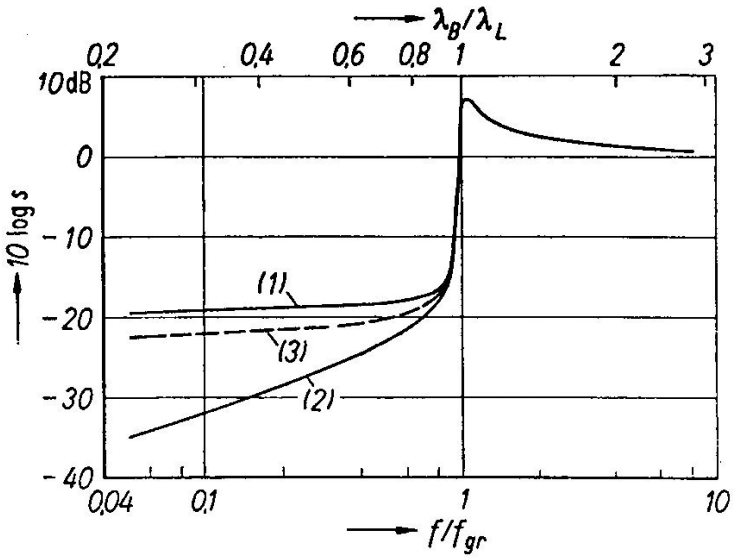


Abbildung 8.3: Abstrahlgrad endlicher Platten: (1) Schwingungsknoten am Plattenrand („harter“ Abschluß), (2) Schwingungsbauch am Plattenrand („weicher“ Abschluß), (3) fortschreitende Welle (Anpassung) (aus [Gösele 1953])

ausbreitet).

Berücksichtigt man die Randbedingungen endlicher Platten (eingespannt, freigestützt, kräftefrei), so lässt sich die Bewegung der Platte z. B. durch Separation der Variablen finden. Allerdings führt das selbst bei einer so einfachen Geometrie wie der einer rechteckig berandeten Platte nicht bei allen vorgebbaren Randbedingungen zu einer geschlossenen Lösung (siehe [Kollmann 1993], S. 32). Die eigentlichen Randbedingungen führen dabei zu einer Einschränkung der Lösungs-Schar der homogenen Differentialgleichung auf eine abzählbar unendliche Menge: die Eigenfrequenzen (Eigenwerte) mit den zugehörigen Eigenformen (Eigenfunktionen; das sind die Resonanzen bzw. Moden der Platte).
In Abbildung 8.6 auf Seite 93 sind etwa die Richtcharakteristika von kreisrunden Platten, die in der Mitte durch eine punktförmige Kraft angeregt werden, dargestellt. Die linke Seite zeigt jeweils die Verhältnisse bei einem „weichen“ Abschluss des Plattenrandes, d.h. bei Auftreten eines Schwingungsbauchs am Rand, die rechte die Verhältnisse bei Auftreten eines Schwingungsknotens. In beiden Fällen handelt es sich um stehende Wellen (Resonanzen, Moden). Die Richtcharakteristik kann man sich daher auf der anderen Membranhälfte symmetrisch fortgesetzt denken. Das obere Bild zeigt die Abstrahlung bei einer Frequenz *oberhalb* der Koinzidenzfrequenz (Phasengeschwindigkeit auf der Membran doppelt so hoch wie die Schallgeschwindigkeit in Luft). Deutlich ist die Schallbündelung zu sehen, die in der Richtung des Erhebungswinkels wie bei der unendlichen Platte liegt. Beim unteren Bild ist die Phasengeschwindigkeit nur halb so groß wie die Schallgeschwindigkeit, die Frequenz

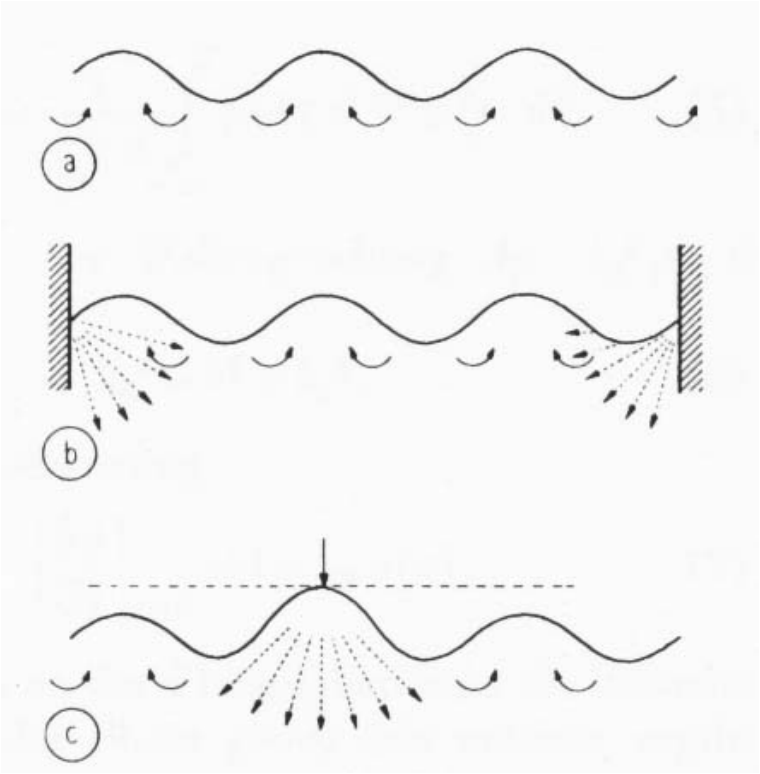


Abbildung 8.4: Abstrahlverhalten endlicher Platten unterhalb der Koinzidenzfrequenz (aus [Heckl 1959], S. S.372)

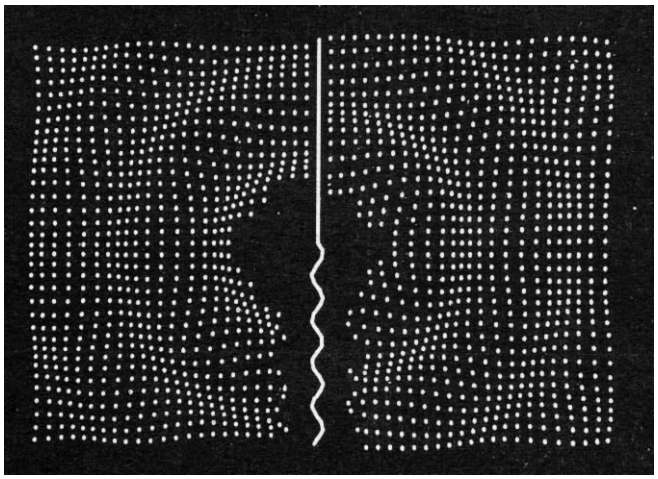


Abbildung 8.5: Teilchenbewegung im umgebenden Medium eines durch eine mittige Punktkraft angeregten, an den Rändern unterstützten Biegeschwingers (aus [Möser 1988], S. 13)

liegt *unterhalb* der Koinzidenzfrequenz. Beim Vergleich des oberen und unteren Bildes sieht man, wie stark die Abstrahlung bei kleinen Phasengeschwindigkeiten, d.h. für Frequenzen unterhalb der Koinzidenzfrequenz, von den Randbedingungen (Abschluss) an den äußeren Rändern abhängt. Bei Wellen mit hoher Phasengeschwindigkeit hat die Art des Abschlusses nur einen relativ geringen Einfluss auf die Abstrahlung.

Wir wollen nun aufzählen, welche prinzipiellen Fälle für die Abstrahlung einer Platte begrenzter Fläche in Abhängigkeit vom Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten von Platte und Luft möglich sind (siehe auch [Firma German Physiks 1994]):

- Für $c_B \ll c_0$ läuft die Biegewelle ohne Wellenablösung, d. h. ohne Abstrahlung, da sich die Welle auf der Platte für die umgebende Luft wie n-fache, gegenphasige Strahlungsquellen darstellt, die sich in Summe auslöschen.
- Für $c_B < c_L$ kann eine Biegewelle zur Schallabstrahlung führen wenn
  - die Platten-Abmessungen $\leq \lambda_B/2$ sind, da es dann nicht zu gegenphasigen Auslöschungen kommen kann
  - die Platte derart biegedämpfungsbehaftet ist, dass nur jeweils ein Membranradius von $\leq \lambda_B/2$ eine stark abnehmende Biegewelle zulässt.
- Bei $c_B = c_0$ (Koinzidenzfrequenz) beginnt sich die Welle unter einem Winkel von nahe 0° abzulösen, d. h. die abgelöste Welle läuft parallel zur Plattenoberfläche (bei dieser Frequenz entsteht nach Gösele ein stufiger Anstieg des Wirkungsgrades, abhängig vom Verhältnis der Plattenlänge zur Wellenlänge und vom Biegewellenwirkungsgrad, siehe [Firma German Physiks 1994]).
- Für $c_B > c_0$ löst sich die Biegewelle mit zunehmender Frequenz unter einem Winkel > 0°, zunehmend bis < 90° von der Membran ab.
- Für $c_B >> c_0$ schwingt die Platte nahezu konphas, die Biegewelle löst sich unter einem Erhebungswinkel von ≈ 90° von der Platte ab.

Dabei bedeuten:

c_B ... Phasengeschwindigkeit der Biegewelle auf der Platte

c_0 ... Schallgeschwindigkeit in Luft

Wie bereits mehrfach erwähnt, können in *allen* Fällen auch Biegewellennahfelder eine Schallabstrahlung vom Strahler verursachen.

Voraussetzung für die Ablösung und damit Abstrahlung einer Welle von der Platte in die Luft ist also, dass

- die Wellenlänge der Biegewelle auf der Platte (λ_B) größer als die in der Luft (λ_0) ist,

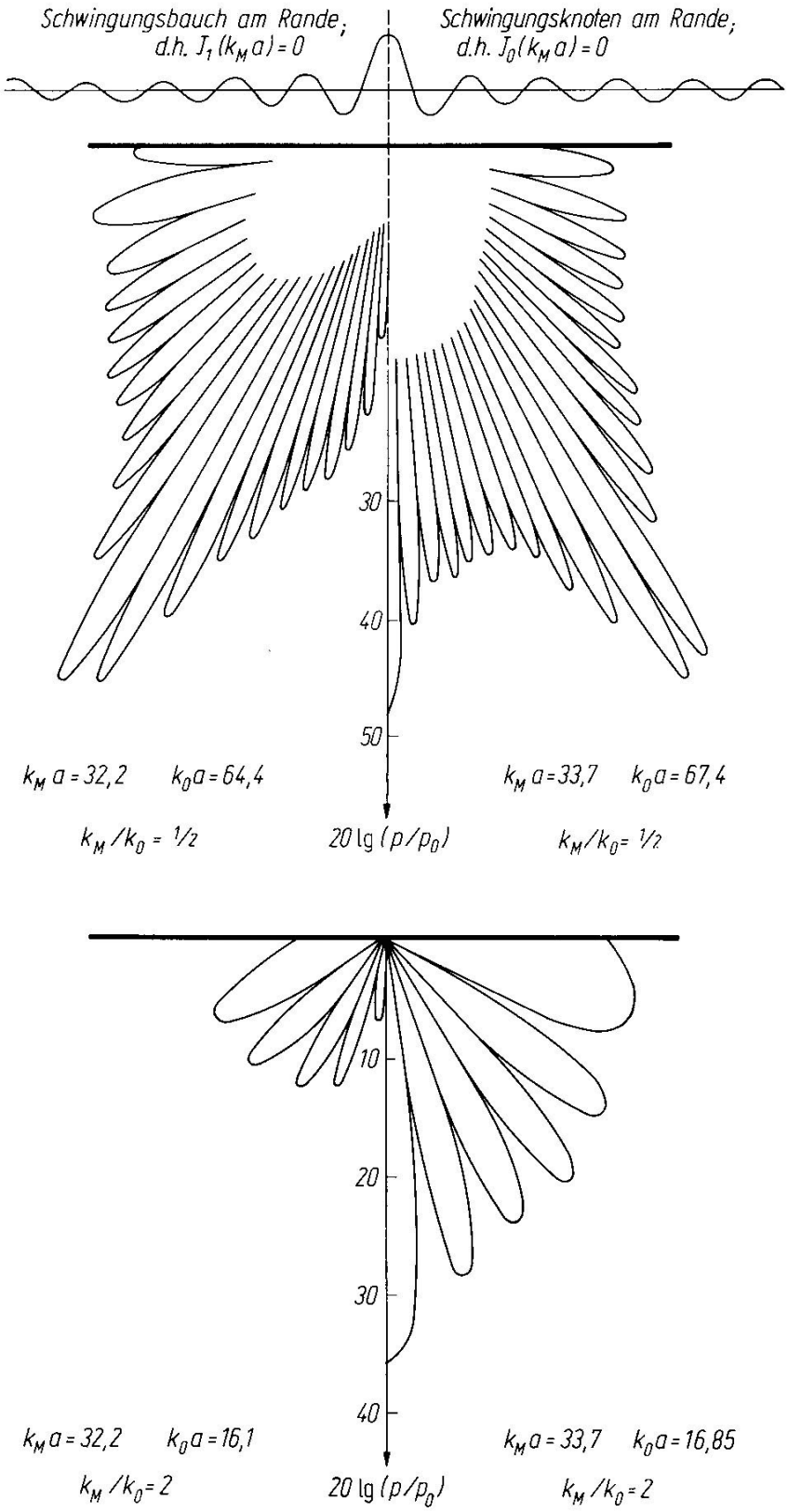


Abbildung 8.6: Richtcharakteristika von kreisrunden Platten (aus [Cremer und Heckl 1995], S. 490)

- Biegewellennahfelder auf der Platte entstehen oder
- die wirksame „Biegewellenfläche“ klein gegen die Biegewellenlänge auf der Platte ist.

8.1.2 Konsequenzen für die Entwicklung von Schallwandlern

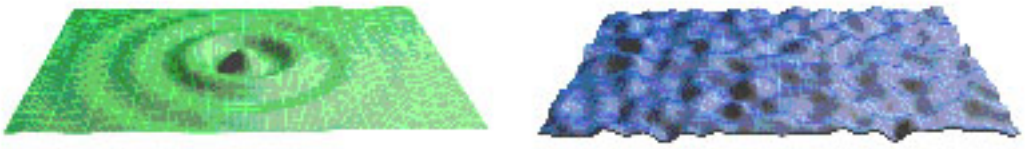
Durch die Wahl des Materials der Platte und im Allgemeinen auch ihrer Form (wir behandeln hier aber nur die *ebenen* Strahler) kann die Koinzidenzfrequenz innerhalb weiter Grenzen festgelegt werden. Je nach Dimensionierung der Platte kann daher einer der oben genannten Arbeitsbereiche gezielt zur Schallabstrahlung genutzt oder auch vermieden werden (siehe [Firma German Physiks 1994]). Geht man wieder von *endlichen* Platten oder auch Schalen aus, kann man folgende grundlegende Überlegungen anstellen:

- Hohe Koinzidenzfrequenz ($f_k \gg f_o$)
  In diesem Fall muss die Phasengeschwindigkeit der Biegewelle c_B sehr niedrig sein. Dies ist bei Materialien mit niedrigem $E \cdot h/\rho$-Verhältnis, also bei sehr biegeweichen und schweren Stoffen, gegeben. Das Biegewellennahfeld an der Anregestelle erzeugt eine fast ungerichtete Schallabstrahlung, ebenso die Randeffekte. Der Wirkungsgrad ist allerdings gering.

- Koinzidenzfrequenz im Übertragungsbereich ($f_u < f_k < f_o$)
  Der Wandler arbeitet unterhalb von f_k als Kolben mit „akustisch kurzgeschlossener“ Biegewellenabstrahlung, oberhalb von f_k als Biegewellenschwinger mit ansteigender Phasengeschwindigkeit c_B. Nachteilig sind der ansteigende Wirkunsgrad oberhalb von f_k und die auftretenden Moden.

- Tiefe Koinzidenzfrequenz ($f_k < f_u$)
  Der Schallwandler arbeitet mit zunehmender Frequenz bei gleichzeitig steigender, hoher Phasengeschwindigkeit c_B immer mehr als idealer Kolben. Solange die Biegewellenlänge λ_B wesentlich größer als die wirksame Länge der Platte bzw. Schale ist, kann sich keine stehende Welle durch Reflexion aufbauen und der Frequenz- und Phasengang ist ausgeglichen. Erst wenn bei höheren Frequenzen die Baulänge der Platte oder Schale in die Größenordnung der Wellenlänge kommt, bilden sich stehende Wellen (Moden).
  Problematisch sind diese Moden und der frequenzabhängige Abstrahlwinkel.
  Die Dimensionierung muss hier genau anders als im ersten Fall erfolgen: hohe Steifigkeit (hoher E-Modul, hohe bezogene Biegesteife durch Wölbung der Schale) und niedriges spezifisches Gewicht.

Eine Optimierung (Verringerung der Resonanzeinflüsse und dadurch Glättung des Frequenzganges) kann laut [Firma German Physiks 1994] durch gezielte Beeinflussung der Reflexionen erfolgen:



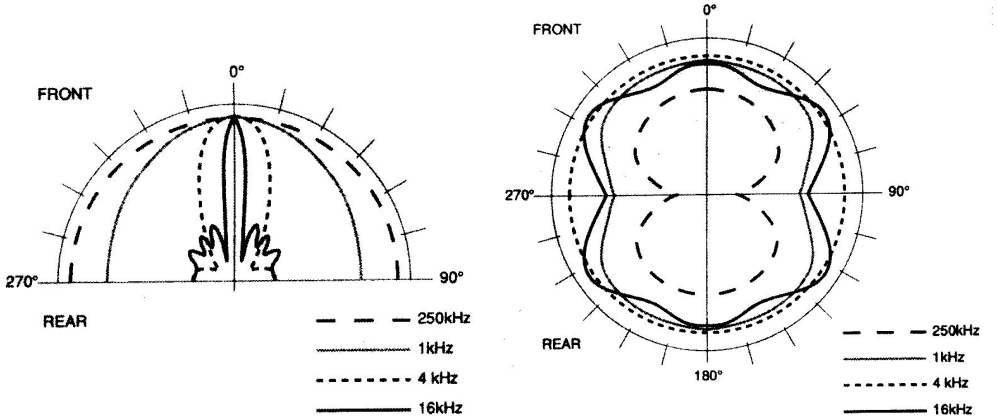
(a) Kurz nach einer Anregung (b) Im eingeschwungenen Zustand

Abbildung 8.7: Schwingungsverteilung eines NXT-Wandlers bzw. DML-Panels (aus [Altrichter 1999])

- Frequenzunabhängiger, der Dispersion entsprechender Abschluss des Platten- bzw. Schalenrandes durch frequenzabhängig absorbierende Dämpfer. Dies ist in der Praxis nicht realisierbar.
- Frequenzabhängige mechanische Resonanzabsorber in oder an der Platte bzw. Schale. Dieser Ansatz erhöht allerdings die Membranmasse.
- Mechanisch bedämpfte Anregung der Biegewelle.
- Elektrische Resonanzabsorber für die Resonanzfrequenzen.
- Anhebung der ersten Resonanz auf eine Frequenz oberhalb von f_o durch Material- und Formwahl der Platte bzw. Schale. Dies wäre die optimale Lösung, wenn f_k unterhalb des Hörbereiches und f_D oberhalb des Hörbereiches zu liegen kämen.

Der Manger-Schallwandler
Laut Firma Manger liegt die Koinzidenzfrequenz des Manger-Schallwandlers bei $f_k \approx 80\,kHz$. Damit fällt der Manger-Wandler in die Kategorie mit Koinzidenzfrequenz weit oberhalb des Hörbereiches. Die Abstrahlung erfolgt also durch Biegewellen-Nahfelder im Bereich der Anregung durch die Schwingspule und Begrenzung des abstrahlenden Bereiches durch Bedämpfung bzw. die beschränkte Abmessung der Membran.

DML-Panels
Die Firma NXT geht demgegenüber einen ganz anderen Weg: Anstatt Reflexionen an den Begrenzungen der Platte zu verhindern, wird hier versucht, durch gezielte Optimierung der Geometrie, des Materials und der Orte der Anregung eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Platten-Moden zu erreichen (siehe Abbildungen 8.7(a) und 8.7(b)). Das führt zu einer (im optimalen Fall) nahezu ungerichteten Schallabstrahlung von der Platte (vgl. Abb. 8.8(a) und 8.8(b)), allerdings mit dem Nachteil eines schlechten Ausschwingverhaltens (siehe Abb. 8.9).
Diese Art von Schallwandlern ist unter dem Begriff DML-Panels (Distributed-Mode



(a) Kolbenmembran (b) DML-Panel (nach NXT)

Abbildung 8.8: Abstrahlverhalten von Kolbenmembran und DML-Panel (aus [Altrichter 1999])

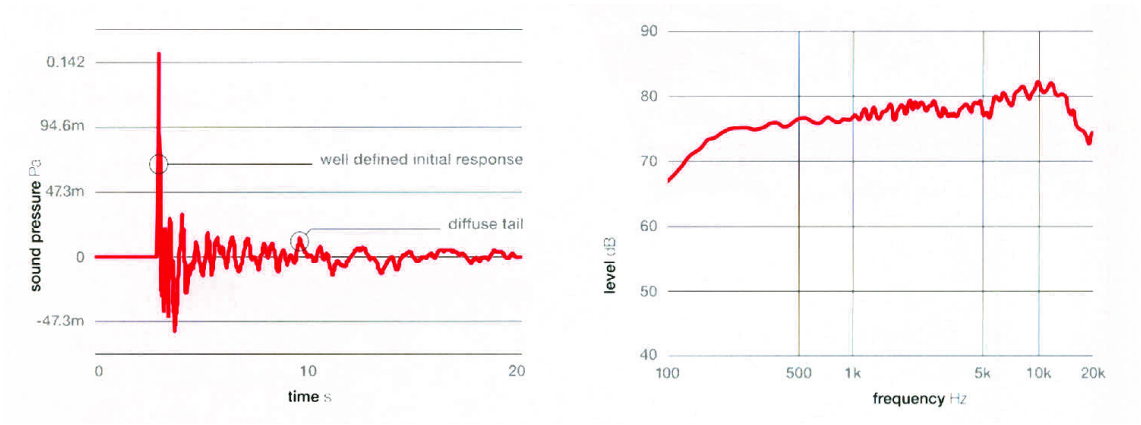


Abbildung 8.9: Impulsantwort und Frequenzgang eines DML-Panels von NXT (aus Werbematerial der Firma NXT)

Abbildung 8.10: Ansicht des DDD-Biegewellenwandlers, Vorderseite

Loudspeaker) bekannt und wird in neuerer Zeit wegen der geringen möglichen Bautiefe und der ungerichteten Abstrahlung bei Consumer-Produkten immer populärer.

Walsh- und DDD-Biegewellenwandler
Der Walsh-Schallwandler (in den Achtziger Jahren vom Amerikaner Lincoln Walsh als „Wave-Transmission-Line“ patentiert), der von der Firma Ohm produziert wird, und der später entwickelte „DDD-Biegewellenwandler“ (DDD steht für „Dicks Dipole Driver“) der Firma German Physiks arbeiten mit einer tief liegenden Koinzidenzfrequenz. Die den Schall abstrahlende Fläche ist bei beiden aber *nicht* eben, sondern konisch nach oben zulaufend (siehe Abbildungen 8.10 und 8.11). Obwohl diese Wandler nicht zu den ebenen Biegewellen-Schallwandlern zählen, möchten wir sie trotzdem in die Aufzählung übernehmen, weil sie derzeit außer den zwei oben genannten Varianten die einzigen verfügbaren, kommerziellen Biegewellen-Wandler sind. Beim Walsh-Wandler wurden verschiedene Materialien (Titan, Aluminium und Pappe) zu einem Kegelstumpf verklebt (siehe Abb. 8.11 auf der nächsten Seite). Zur Unterdrückung von Moden ist der Kegelstumpf von innen mit fast 100 g Dämpfungsmaterialien beklebt. Der DDD-Biegewellenwandler wurde auf Basis einer theoretischen Abhandlung von Peter Dicks mit einer Titan-Membran ausgestattet und kommt mit einer wesentlich geringeren Bedämpfung aus. Dicks leitete angeblich die Lösung für die Biegewellenausbreitung auf einem Konus her. Die dann mögliche mathematische Berechnung und Dimensionierung von Material und Form des

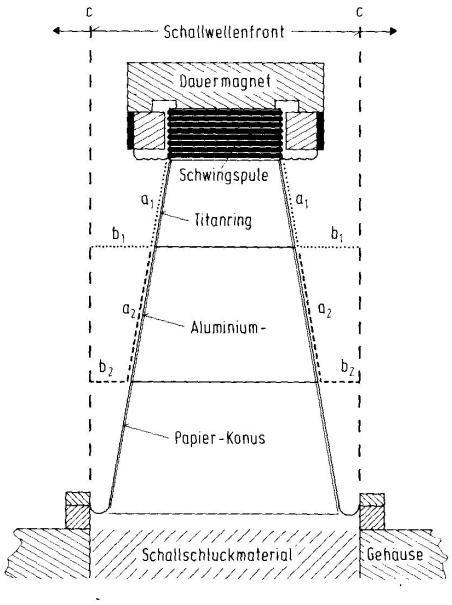


Abbildung 8.11: Prinzip-Skizze vom Aufbau des Walsh-Biegewellenwandlers (aus [Altrichter 1999])

Konus gestattete es, gezielt nach der optimalen Bauweise zu suchen. Laut [Firma German Physiks 1994] liegt die Koinzidenzfrequenz des DDD-Biegewellenwandlers bei $f_k = 220\,Hz$ und die erste durch Reflexion der Biegewelle am Rand verursachte Resonanz (wir wollen solche Resonanzen - [Firma German Physiks 1994] folgend - „Dipolresonanzen“ nennen und die unterste Dipolresonanz mit f_D bezeichnen) bei $f_D = 6\,kHz$. Die Resonanzen des Konus werden beim DDD-Wandler durch mechanische und elektrische Maßnahmen zur Dämpfung weitgehend unterdrückt. Ein Vorteil der konischen Membranform ist neben ihrer hohen Biegesteife in Axialrichtung, dass damit eine Schallabstrahlung über einen Winkelbereich von 360° möglich ist (rundum strahlend).

8.2 Abstrahlung des Manger-Schallwandlers

8.2.1 Analytische Berechnung

Mit dem ganzen Vorwissen, das wir in den vorangegangenen Kapiteln geschaffen haben, können wir uns nun endlich an die Berechnung der Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers machen. Die Herleitung folgt im Prinzip der Skizze aus [Heckl 1978] von Prof. Manfred Heckl vom Institut für technische Akustik der Technischen Universität Berlin. Er hatte auf Anfrage der Firma Manger die Übertragungseigenschaften näherungsweise analytisch berechnet. Auf das Ergebnis dieser

Näherungslösung stützen sich einige werbewirksame Aussagen der Firma Manger.

Folgende Annahmen wurden getroffen, um die analytische Rechnung mit vertretbarem Aufwand durchführen zu können:

1. Auf der Platte herrschen keine durch die äußere Befestigung hervorgerufenen Membranspannungen.
2. Die Platte ist genügend groß und stark genug bedämpft, so dass an der äußeren Berandung und der inneren Befestigung keine Biegewellen reflektiert werden.
3. Das Schwingspulengewicht wird vernachlässigt.

Diese Annahmen erlauben die Verwendung des Kirchhoff'schen Plattenmodells. Behandelt man den Manger-Schallwandler in erster Näherung als unendliche Platte, müssen keine eigentlichen Randbedingungen erfüllt werden, die die Rechnung verkomplizieren. Außerdem kann man, wie in Kapitel 5.4 gezeigt, mit den Ausdrücken für Strahlungs- und Wellenimpedanz der unendlichen Platte arbeiten.

Weiters wird noch vorausgesetzt, dass

1. die Biegewellenlänge bis mindestens 25 kHz kleiner als die Wellenlänge des Schalls in der Luft ist und
2. die Strahlungsbelastung durch die umgebende Luft vernachlässigt werden kann.

Punkt 1 ist dabei mit Sicherheit erfüllt, weil die Firma Manger für ihren Wandler eine Koinzidenzfrequenz von etwa 80 kHz angibt. Punkt 2 ist eine übliche Vereinfachung, wenn Wandler in Luft abstrahlen und die Membran bzw. Platte nicht sehr leicht ist. In dichteren Fluiden (etwa Wasser) wäre diese Rückwirkung nicht vernachlässigbar. Die „Membran“ (die abstrahlende Platte) des Manger-Schallwandlers ist aber verhältnismäßig schwer, daher kann man in guter Näherung die Strahlungsbelastung der Platte vernachlässigen.

Betrachten wir die Prinzip-Skizze in Abbildung 8.12. Ganz allgemein soll die Kraft-Einleitung in die Platte entlang eines Radius von a erfolgen. Beim Manger-Schallwandler beträgt dieser Radius in Wirklichkeit $3,5\ cm$.
Wir beschreiben den in der Luft entstehenden Schalldruck (wie in Kapitel 5 auf Seite 41) als Rücktransformierte von radialem Wellenzahlspektrum (Hankel-Transformierte) und Frequenzspektrum (Fourier-Transformierte):

$$p(r,z,t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\left[\int_{0}^{+\infty} \underline{p}(k_r,\omega)\cdot e^{-jk_z z}\cdot J_0(k_r r)\cdot k_r\, dk_r\right]}^{\text{inverse Hankel-Transformation}} e^{j\omega t}\, d\omega}_{\text{inverse Fourier-Transformation}} \tag{8.1}$$

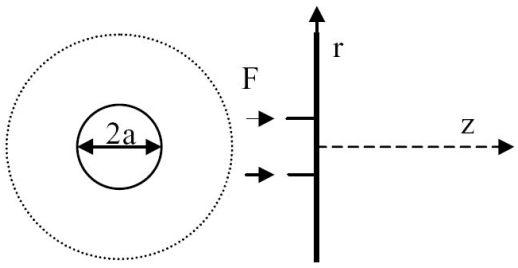


Abbildung 8.12: Prinzipskizze des Manger-Schallwandlers, Querschnitt (aus [Firma Manger])

z ... Normalabstand von der Plattenebene $[m]$
r ... Abstand von einer Achse senkrecht durch den Mittelpunkt der Platte $[m]$
k_r ... Wellenzahl in radialer Richtung $[rad/m]$
$\underline{p}(k_r, \omega)$ ... Wellenzahlspektrum des Drucks an der Oberfläche der Platte $[N/m^2]$

Der Teil in den eckigen Klammern ist dabei analog zur Verwendung der zweidimensionalen Fourier-Transformation in kartesischen Koordinaten entstanden (allerdings unter der Bedingung der Radialsymmetrie!). Zusätzlich wird nun eine Fourier-Transformation durchgeführt, da wir letztendlich ja nicht nur an einer einzelnen Frequenz interessiert sind, sondern an der Abstrahlung der Platte für beliebige Zeitsignale.

Setzt man den Zylinderkoordinaten entsprechend den Ansatz

$$\underline{p}(r, z) = \underline{p}(k_r) k_r J_0(k_r r) e^{-jk_z z} \tag{8.2}$$

in die Schallfeldgleichung ein, dann ergibt sich:

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_r^2} \tag{8.3}$$

Dies haben wir schon in Kapitel 5 gezeigt (Gleichung 5.16 auf Seite 52).

Vernachlässigen wir die Rückwirkung der Luft auf die Platte in Gleichung 5.21, dann besteht im radialsymmetrischen Fall zwischen anregender Druckverteilung und Schalldruck die folgende Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_P(k_r, \omega) &\approx \frac{\underline{p}_A(k_r, \omega)}{\underline{Z}_W} \\ \underline{p}_L(k_r, \omega) &= \underline{Z}_{rad} \cdot \underline{v}_P(k_r, \omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{p}(k_r, \omega) \approx \frac{\underline{Z}_{rad}}{\underline{Z}_W} \cdot \underline{p}_A(k_r, \omega) \tag{8.4}$$

$\underline{v}_P(k_r, \omega)$ ... Wellenzahlspektrum der Plattenschnelle $[m/s]$
$\underline{Z}_{rad}$ ... Strahlungsimpedanz der unendlichen Platte $[Ns/m^3]$
$\underline{Z}_W$ ... Wellenimpedanz der Kirchhoff-Platte $[Ns/m^3]$

Die Strahlungsimpedanz $\underline{Z}_{rad}$ und die Wellenimpedanz der unendlichen Platte $\underline{Z}_W$ haben wir bereits in den Kapiteln 5.3 (Gleichung 5.14 auf Seite 51) und 7.4 (Gleichung 7.30 auf Seite 84) hergeleitet. Für den radialsymmetrischen Fall können wir schreiben:

$$\underline{Z}_{rad} = \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}}$$

$$\underline{Z}_W = \frac{\underline{p}(k_r)}{\underline{v}(k_r)} = \frac{B}{j\omega} \cdot (k_r^4 - k_B^4)$$

Diese können nun eingesetzt werden. Daraus ergibt sich für den Schalldruck in der Luft:

$$\underline{p}(k_r, \omega) = \frac{j\omega\rho_0 c_0 k_0}{B(k_r^4 - k_B^4)\sqrt{k_0^2 - k_r^2}} \cdot \underline{p}_A(k_r, \omega) \tag{8.5}$$

Jetzt müssen wir nur noch die anregende Kraft einsetzen. Diese greift bei uns entlang eines Kreisrings mit dem Radius a an:

$$p_A(r, t) = \frac{F_0(t)}{2\pi a} \cdot \delta(r - a) \tag{8.6}$$

$\delta(r) \ldots$ Dirac-Distribution im Ortsbereich

Das Frequenzspektrum und das Wellenzahlspektrum für die anregende Druckverteilung ergeben sich durch Hintransformation in den Bildbereich:

$$\underline{p}_A(k_r, \omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\left[\int_0^{+\infty} \underline{p}_A(r, t) \cdot J_0(k_r r)\, r dr \right]}^{\text{Hankel-Transformation}} e^{-j\omega t}\, d\omega}_{\text{Fourier-Transformation}}$$

$$\underline{p}_A(k_r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{F_0(t)}{2\pi a} \delta(r - a) \cdot J_0(k_r r)\, r dr \right] e^{-j\omega t}\, d\omega \tag{8.7}$$

Die Hankel-Transformation ist, wegen der Delta-Distribution im Integranden und der „Sampling-Eigenschaft“ der Distribution, leicht zu berechnen. Für die Kraft muss dann nur noch ihre Fourier-Transformierte geschrieben werden:

$$\underline{p}_A(k_r, \omega) = \frac{J_0(k_r a)}{2\pi} \cdot F_0(\omega) \tag{8.8}$$

Nun setzen wir Gleichung 8.8 in Gleichung 8.5 ein und vereinfachen ($c_0 \cdot k_0 = \omega$):

$$\underline{p}(k_r, \omega) = \frac{j\,\omega^2 \rho_0}{B(k_r^4 - k_B^4)\sqrt{k_0^2 - k_r^2}} \cdot \frac{J_0(k_r a)}{2\pi} \cdot F_0(\omega) \tag{8.9}$$

Um den Schalldruck in der Luft in Abhängigkeit von Ort und Zeit zu erhalten, transformieren wir wieder in den Originalraum zurück (Einsetzen von Gleichung 8.9 in Gleichung 8.1), und es ergibt sich:

$$p(r,z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{j\,\rho_0\,\omega^2 J_0(k_r a)\,\underline{F}_0(\omega)}{2\pi \cdot B\,(k_r^4 - k_B^4)\sqrt{k_0^2 - k_r^2}} \cdot e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z} J_0(k_r r)\, e^{j\omega t} k_r\, dk_r d\omega \tag{8.10}$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass die Biegewellenlänge λ_B im interessierenden Frequenzbereich kleiner als die Luftwellenlänge λ_0 ist ($\lambda_B < \lambda_0$), ist $k_0 < k_B$. Da wir uns ohnehin nur für eine Fernfeldlösung interessieren ($k_r < k_0$, Abstrahlung vom Schallwandler in das Fernfeld, gleichbedeutend mit trigonometrischen Lösungen in z) gilt daher immer $k_r \ll k_B$. Gleichung 8.10 kann daher unter Berücksichtigung von Gleichung 7.2 auf Seite 72 geringfügig vereinfacht werden:

$$k_B^4 = \frac{\omega^2\, m'}{B} \Rightarrow \frac{\omega^2}{(\underbrace{k_r^4}_{\ll} - k_B^4) \cdot B} \approx \frac{\omega^2}{-\frac{\omega^2\, m'}{B} \cdot B} = -\frac{1}{m'}$$

$$p(r,z,t) = \frac{-j\rho_0}{4\pi^2 m'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{J_0(k_r a) \cdot J_0(k_r r)}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}}\, \underline{F}_0(\omega)\, e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z}\, e^{j\omega t} k_r\, dk_r\, d\omega \tag{8.11}$$

Das Integral über die Wellenzahl kann laut Prof. Heckl ([Heckl 1978]) angenähert werden:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{J_0(k_r a) \cdot J_0(k_r r)}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}}\, e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z}\, k_r\, dk_r \approx \frac{-j}{2\sqrt{r^2+z^2}}\, e^{-jk_0\sqrt{r^2+z^2}} \tag{8.12}$$

Die Näherung gilt allerdings nur, solange a kleiner als die halbe Luftwellenlänge ist. Auf der Mittelsenkrechten über der Platte gilt die Näherung jedoch auch für größere Werte von a. Für den realen Schwingspulen-Durchmesser des Manger-Schallwandlers von 7 cm ergibt sich damit streng genommen eine obere Grenze von etwa 5 kHz als Gültigkeits-Grenze der Näherung.
Schreiben wir die verbleibende zeitliche Fourier-Rücktransformation nun an und setzen dabei die Näherung der Hankel-Rücktransformation (Gleichung 8.12) ein:

$$p(r,z,t) = \frac{-\rho_0}{8\pi^2 m' \sqrt{r^2+z^2}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}_0(\omega)\, e^{-j\frac{\omega}{c_0}\sqrt{r^2+z^2}}\, e^{j\omega t}\, d\omega}_{2\pi\cdot \text{ inverse Fourier-Transformation}} \tag{8.13}$$

Mit dem Verschiebungssatz der Fourier-Transformation folgt daraus:

$$\boxed{p(r,z,t) = \frac{-\rho_0}{4\pi m'\sqrt{r^2+z^2}} \cdot F_0\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{c_0}\right)} \tag{8.14}$$

Diese Formel sagt uns Folgendes:
Der Schalldruck folgt in seinem zeitlichen Verlauf exakt der anregenden Kraft, und zwar mit einer Verzögerung, die der Laufzeit des Schalls in der Luft bis zum betrachteten Punkt entspricht! Dieses erstaunliche Ergebnis wurde schon oft zitiert und auf dieses Ergebnis beruft sich die Firma Manger immer wieder, wenn es um die guten Wiedergabe-Eigenschaften ihres Wandlers geht.

Heckl merkt an ([Heckl 1978]), dass diese Näherung für das Integral nur auf der Hauptabstrahlachse (Normalrichtung zur Strahleroberfläche) gilt und dass eine Lösung für andere Abstrahlrichtungen nur durch numerische Auswertung der Gleichungen zu erhalten sei. Generell kann vermutet werden, dass für solche Abstrahlrichtungen neben der Hauptabstrahlachse der langsame Abfall der Bessel-Funktion $J_0(k_r a)$ für größer werdende Argumente zu einer „Abrundung der Ecken im Zeitverlauf“ führen wird (das würde einer Höhendämpfung im Frequenzbereich entsprechen), wenn die Abweichungen von der Hauptabstrahlachse klein sind. Für noch größere Abweichungen von der Hauptabstrahlachse ist die Lösung völlig ungültig.
Im nächsten Kapitel wollen wir die physikalische Bedeutung der abgeleiteten Lösung und der dabei angenommenen Vereinfachungen erklären und einen Vergleich mit Messungen vom Manger-Schallwandler anstellen.

8.2.2 Diskussion der Lösung und Vergleich mit den vorhandenen Messdaten

Das Ergebnis der Rechnung im Rückblick

Wie kommt es nun zu diesem erstaunlichen Ergebnis?
Wie wir in Kapitel 7.1 auf Seite 71 besprochen haben, kommt es in der Nähe von Stellen mit punktförmiger Anregung zur Bildung exponentiell abklingender Biegewellen-Nahfelder. Weil diese örtlich sehr begrenzt sind (ähnlich einer örtlichen Dirac-Distribution), kommt es zu einem breitbandigem Wellenzahlspektrum, das heißt einer nahezu ungebündelten Abstrahlung.
In einem Frequenzbereich, in dem der gesamte Bereich der Schwingspule klein ist gegenüber der freien Luftwellenlänge, können die Phasenunterschiede, die den verschiedenen Laufzeiten des Luftschalls von unterschiedlichen Punkten der Platte entlang der Spule zum Aufpunkt entsprechen, vernachlässigt werden. Diese Näherung steckt in der Vereinfachung des Integrals Gleichung 8.12 auf der vorherigen Seite nach Heckl. Das soll wohl in der von der Firma Manger veröffentlichen Abbildung 8.13 auf der nächsten Seite deutlich gemacht werden. Die genauen Simulationsbedingungen, unter denen dieses Bild entstanden ist, sind jedoch nicht bekannt.

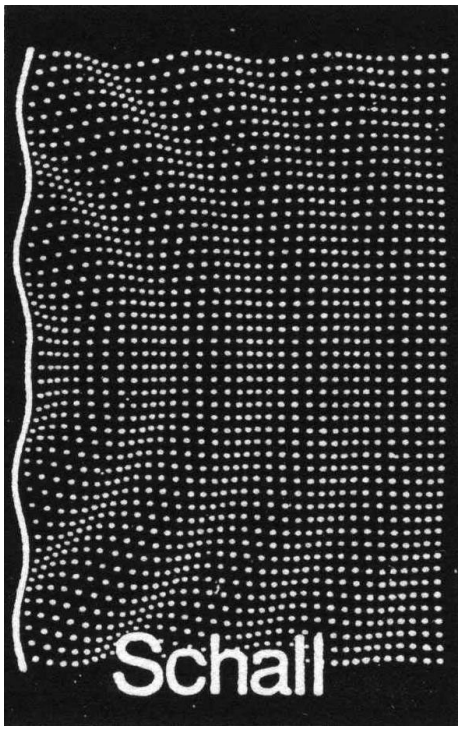


Abbildung 8.13: Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers, Querschnitt (aus [Firma Manger])

Das Argument der zeitlich genauen Reproduktion von Schallereignissen wird immer wieder von der Firma Manger als wichtiger Vorteil des Manger-Schallwandlers gegenüber anderen Schallwandlern ins Feld geführt. Zur Untermauerung der Wichtigkeit der zeitlich genauen Schallreproduktion wird dabei auf die Eigenschaft des Gehörsinnes verwiesen, eine gewisse „Auflösung“ sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich zu besitzen (siehe Abb. 8.14).
Die Hörbarkeit von Phasenverzerrungen (und damit eben des zeitlichen Zusammenhangs zwischen verschiedenen Frequenzkomponenten) wird bis heute immer wieder kontrovers diskutiert. Es gibt einige psychoakustische Untersuchungen, bei denen zur Beurteilung der Hörbarkeit von Phasenverzerrungen meist Signale wie Rauschen oder Sinustöne herangezogen werden. Die Ergebnisse sind dementsprechend schwer umlegbar auf die Hörbarkeit von Phasenverzerrungen bei realen Musiksignalen, die stereophon wiedergegeben werden.

Um die Überlegenheit des Manger-Schallwandlers in der zeitlich genauen Schallreproduktion gegenüber anderen Konstruktionen zu demonstrieren, werden zum Vergleich immer wieder die gemessenen Sprungantworten verschiedener Studiomonitore herangezogen. Dort ist tatsächlich meist das getrennte Einschwingen der verschiedenen Chassis der Mehrwegekombinationen zu sehen (siehe Abb. 8.15). Außer beim Manger-Sound-System sind bei fast allen Sprungantworten die einzelnen Einschwingvorgänge von Tief- Mittel- und Hochtöner getrennt erkennbar, was daran

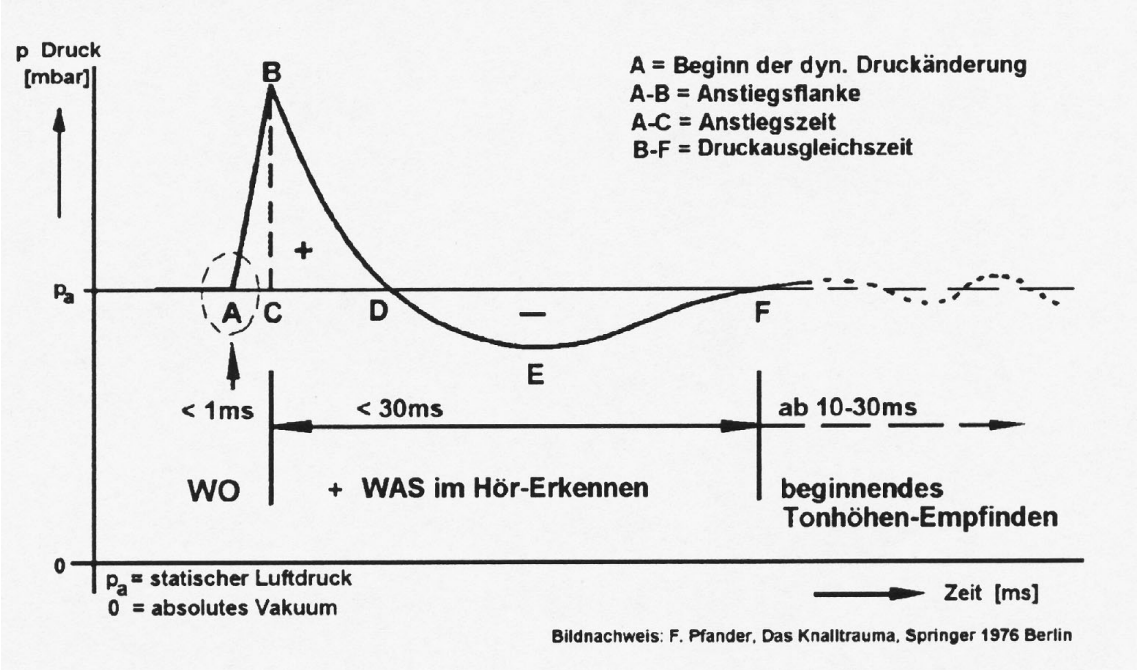


Abbildung 8.14: Erkennen von Richtung und Tonhöhe mit dem Gehörsinn bei impulshaften Schallereignissen (aus [Firma Manger])

liegt, dass die akustischen Zentren nicht aneinander ausgerichtet (also nicht „aligned“) sind. Dies äußert sich in einer nicht-konstanten Gruppenlaufzeit bzw. einem nicht-linearen Phasenfrequenzgang. Die einzige Lautsprecherbox, die in diesem Vergleich dem Manger-Sound-Systems hinsichtlich der zeitlich genauen Reproduktion Konkurrenz machen kann, ist die Box „ESL63“ des Herstellers Quad. Bei dieser Box handelt es sich um einen elektrostatischen Vollbereichslautsprecher. Gleichzeitig ist damit aber die Aussage entkräftet, eine zeitlich genaue Reproduktion von Schallereignissen sei nur mit einem Biegewellen-Wandler überhaupt möglich.

Auch mit herkömmlichen Lautsprecher-Chassis können Lautsprecherboxen gebaut werden, bei denen an einem bestimmten Punkt im Raum (dem Abhörpunkt) kein getrenntes Einschwingverhalten der Chassis sichtbar ist. Auch transient perfekte Lautsprecher sind mit herkömmlichen Lautsprecherchassis im Prinzip möglich. Der Haken dabei ist, dass dies bei einer Mehrwegekonstruktion aus verschiedenen Chassis nur für einen einzigen Punkt im Raum realisierbar ist. Für alle anderen Punkte im Raum stellt sich, auf Grund von Interferenzeffekten durch Laufzeitunterschiede, ein anderer Amplituden- und Phasenfrequenzgang ein. Jedoch kann ein Lautsprecher, der ein gut konstruiertes Koaxial-Chassis mit herkömmlichen Kolbenmembranen benutzt und linearphasiges Frequenzweichendesign aufweist, auch für verschiedene Punkte im Raum genauso „zeitkohärent“ wie der Manger-Schallwandler arbeiten. Neue Koaxial-Lautsprecher-Konstruktionen von Thiel Audio (USA, siehe Abb. 8.16

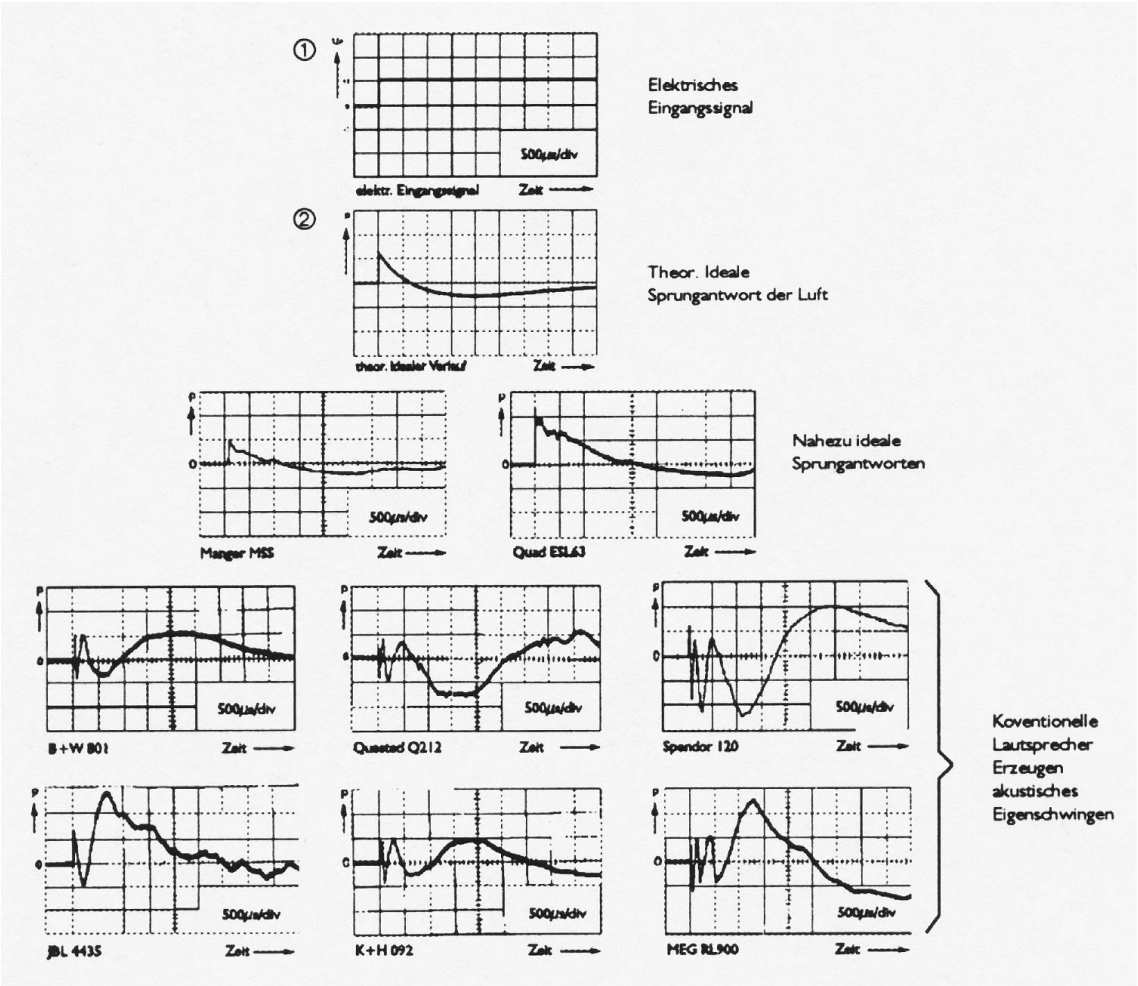


Abbildung 8.15: Einschwingvorgänge verschiedener Lautsprecher (aus [Firma Manger])

Abbildung 8.16: Koaxiallautsprecher von Thiel Audio (USA) (aus Hobby-Hifi 6-2005 (Okt/Nov))

und 8.17) und Elac (Deutschland, siehe Abb. 8.18) ermöglichen dabei eine im Vergleich zum Manger-Schallwandler weit weniger gebündelte Abstrahlung im Hochtonbereich.

Der Hauptvorteil des Manger-Schallwandlers gegenüber klassischen Mehrwege-Systemen ist nichtsdestotrotz der Entfall von Phasenverzerrungen, die durch eingebaute Frequenzweichen und die räumliche Trennung der akustischen Zentren der verschiedenen Einzelsysteme üblicherweise auftreten.
Auch ist mit einem Lautsprecherchassis, das mit einer einzelnen Kolbenmembran arbeitet, keine so hohe obere Grenzfrequenz wie mit dem Manger-Schallwandler erreichbar.

Messergebnisse des Manger-Schallwandlers

An dieser Stelle wollen wir einige Messergebnisse des Manger-Schallwandlers präsentieren. Darunter zunächst die veröffentlichten Ergebnisse der Firma Manger selbst, danach aber auch unabhängige Messungen des Fachmagazins „Hobby Hifi“ (von Bernd Timmermanns) und Messungen von Harald Pairits (für das Institut für Breitbandkommunikation der TU-Graz).

Messungen der Firma Manger
Die Abbildungen 8.19 bis 8.25 stammen von der Homepage der Firma Manger und wurden zur besseren Darstellung farblich bearbeitet.

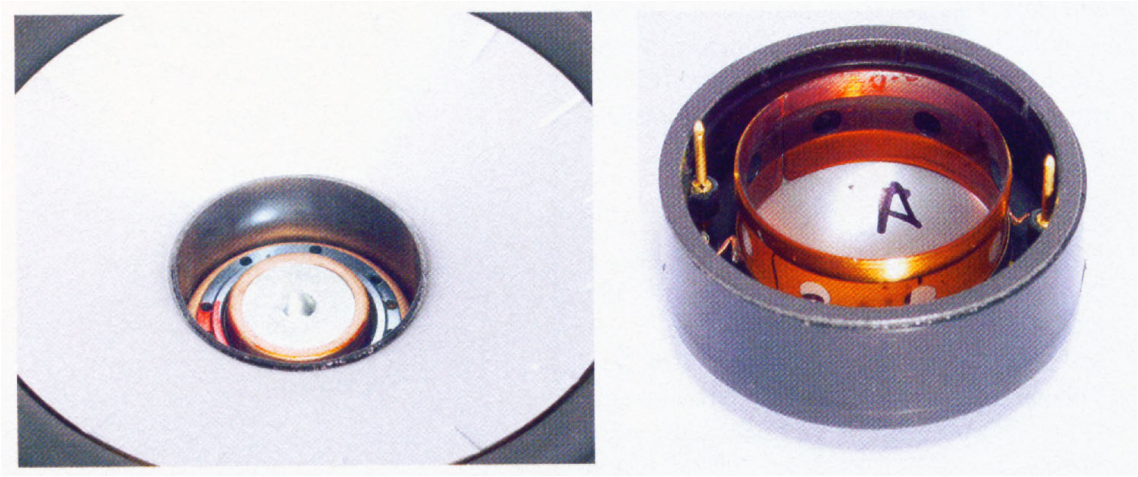


Abbildung 8.17: Koaxiallautsprecher von Jim Thiel (USA), Detailansicht mit entnommenem Hochtöner (aus Hobby-Hifi 6-2005 (Okt/Nov))

Abbildung 8.18: Querschnitt des Koaxiallautsprechers „X-JET“ der Firma Elac (Deutschland) (von der offiziellen Homepage der Firma Elac)

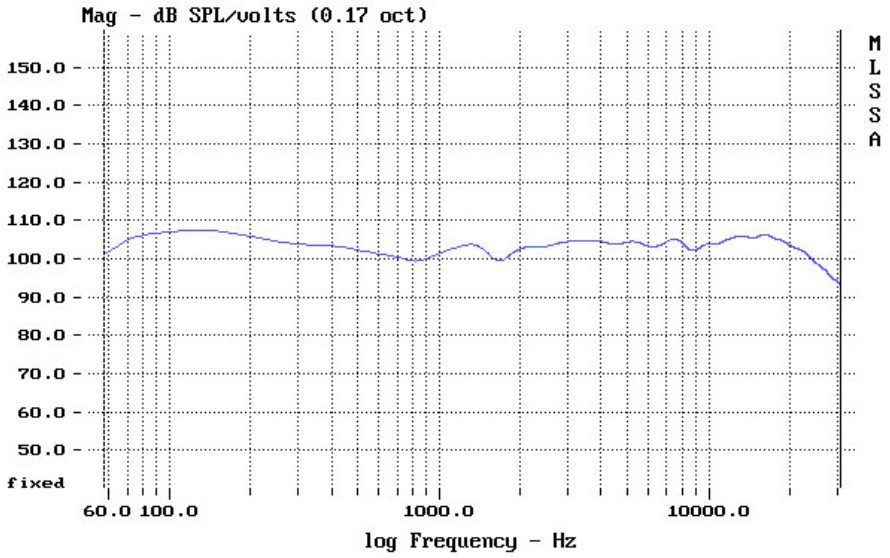


Abbildung 8.19: Amplitudenfrequenzgang des Manger-Schallwandlers, von der offiziellen Homepage der Firma Manger

Der Frequenzgang (Abb. 8.19 auf der nächsten Seite) sieht recht glatt aus. Der Phasenfrequenzgang (siehe Abb. 8.20 auf Seite 110) ist erstaunlich glatt, sogar über weite Strecken nahezu nullphasig, was die Vermutung nahelegt, dass der Laufzeitanteil bis zum Mikrofon entfernt wurde. Dem Impedanzfrequenzgang (Abb. 8.22 auf Seite 111) lässt sich entnehmen, dass neben der Grundresonanz bei etwa 88 Hz auch Moden bei ca. 260 Hz, 450 Hz, 700 Hz und 1400 Hz auftreten. Das zeigt, dass im Bereich unter 2000 Hz eigentlich *nicht* von einem reflexionsfreien Abschluss der Membran gesprochen werden kann.

Messungen von Bernd Timmermanns

In der Ausgabe 4/2004 (Juni/Juli 2004) des renommierten deutschsprachigen Lautsprecher-Magazins Hobby-Hifi waren Messungen des Manger-Schallwandlers abgedruckt. Diese wurden in einer unendlichen Schallwand (nach DIN) von Bernd Timmermanns unter Verwendung von hochwertigem Bruel & Kjaer Equipment und einem Profi-Messsystem (MLSSA) erstellt und sind, ebenfalls farblich nachbearbeitet, als Abbildungen 8.26 bis 8.30 abgedruckt.

Eine zusätzliche Information im Vergleich zu den anderen in dieser Arbeit abgedruckten Messungen bietet das Klirrfaktordiagramm, Abbildung 8.30 auf Seite 115. Hierzu lässt sich sagen, dass der Manger-Schallwandler unterhalb von etwa 1 kHz relativ hohe Verzerrungswerte aufweist, in den Höhen jedoch einen ausgesprochen niedrigen Klirrfaktor hat.

Messergebnisse von Harald Pairits

Die Senken, die in der Amplitudengangmessung der Firma Manger nur andeutungsweise und bei Timmermanns etwas besser zu sehen ist, kommen durch die andere

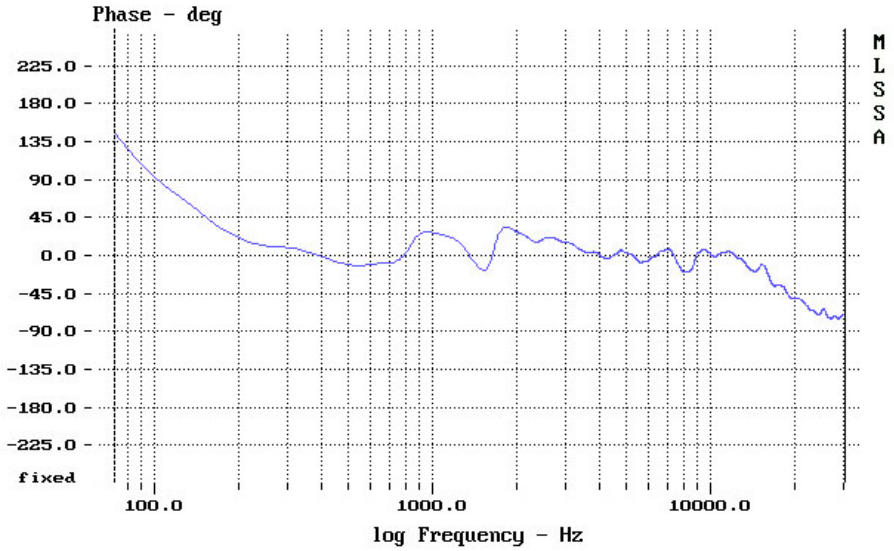


Abbildung 8.20: Phasenfrequenzgang des Manger-Schallwandlers, von der offiziellen Homepage der Firma Manger

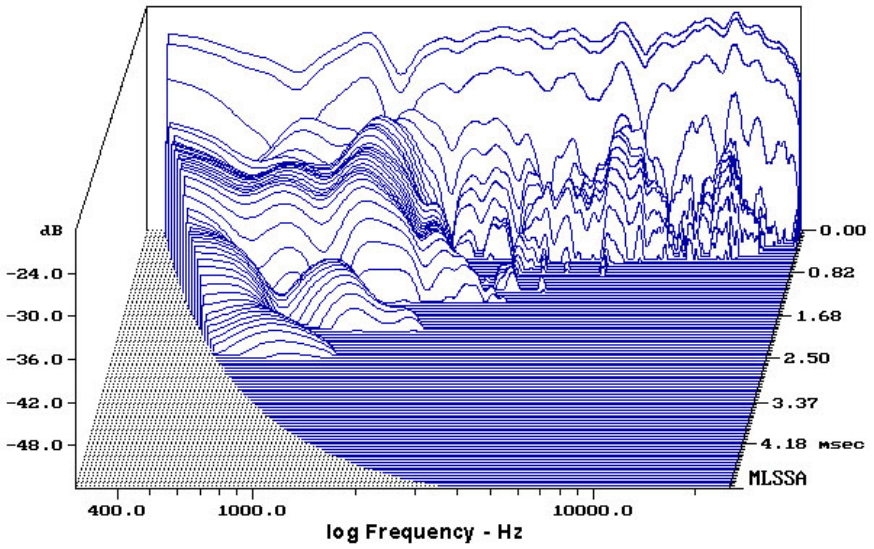


Abbildung 8.21: Wasserfalldiagramm (kumulatives Zerfallsspektrum) des Manger-Schallwandlers, von der offiziellen Homepage der Firma Manger

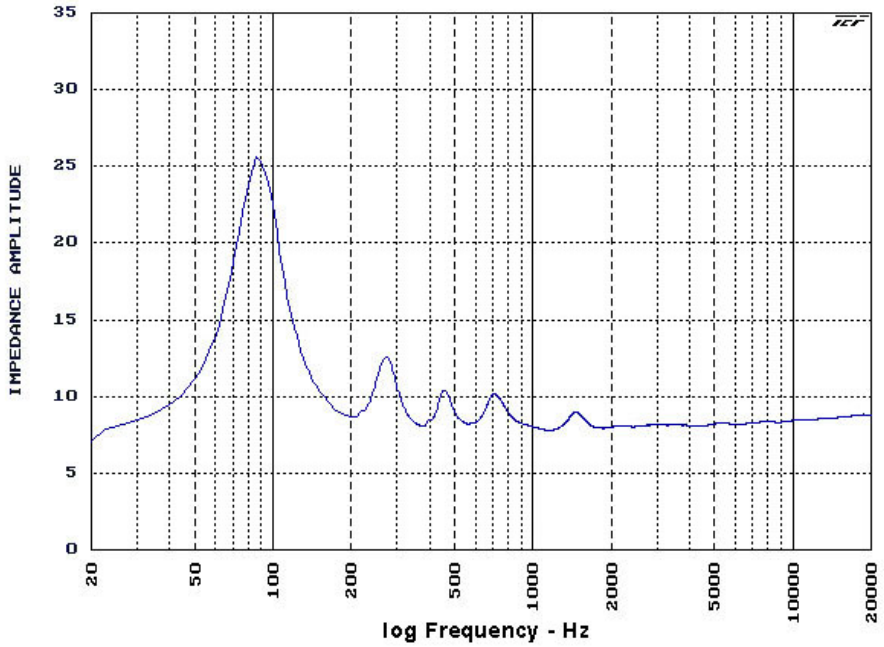


Abbildung 8.22: Imedanzfrequenzgang des Manger-Schallwandlers, von der offiziellen Homepage der Firma Manger

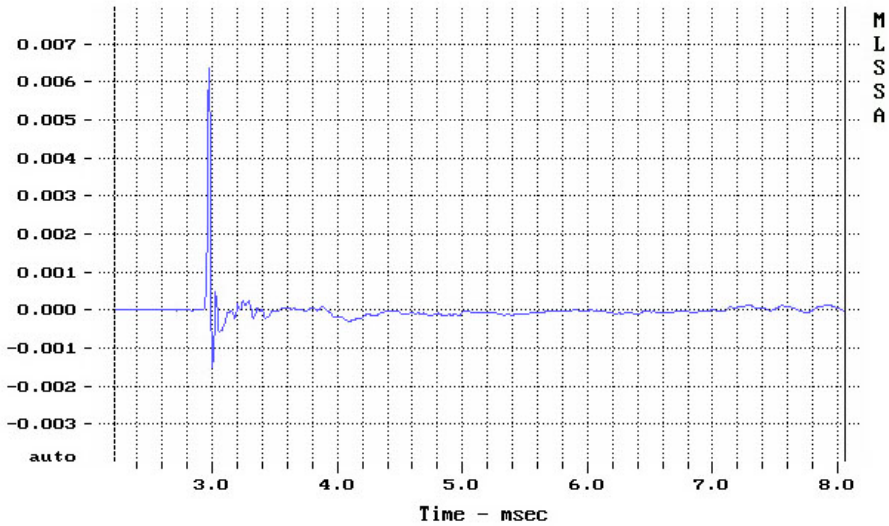


Abbildung 8.23: Impulsantwort des Manger-Schallwandlers, von der offiziellen Homepage der Firma Manger

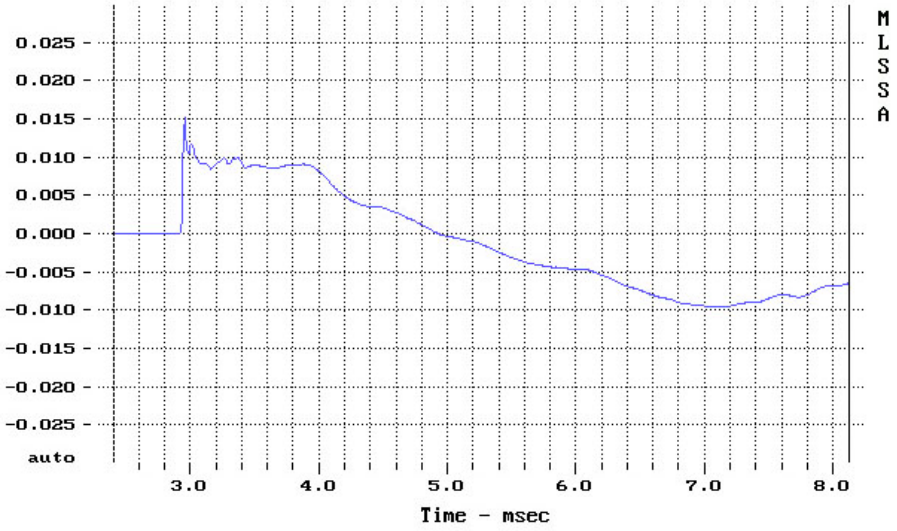


Abbildung 8.24: Sprungantwort des Manger-Schallwandlers, von der offiziellen Homepage der Firma Manger

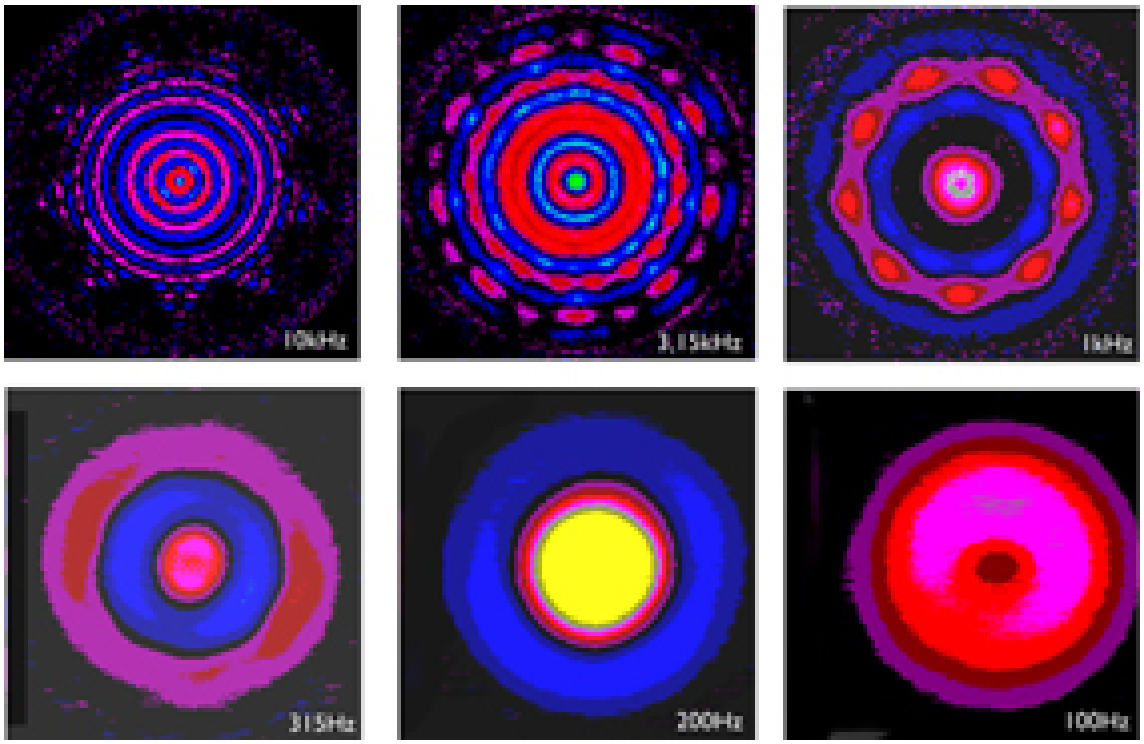


Abbildung 8.25: Laservibrometermessung des Manger-Schallwandlers bei 100 Hz, 200 Hz, 315 Hz, 1 kHz, 3,15 kHz und 10 kHz, aus [Firma Manger]

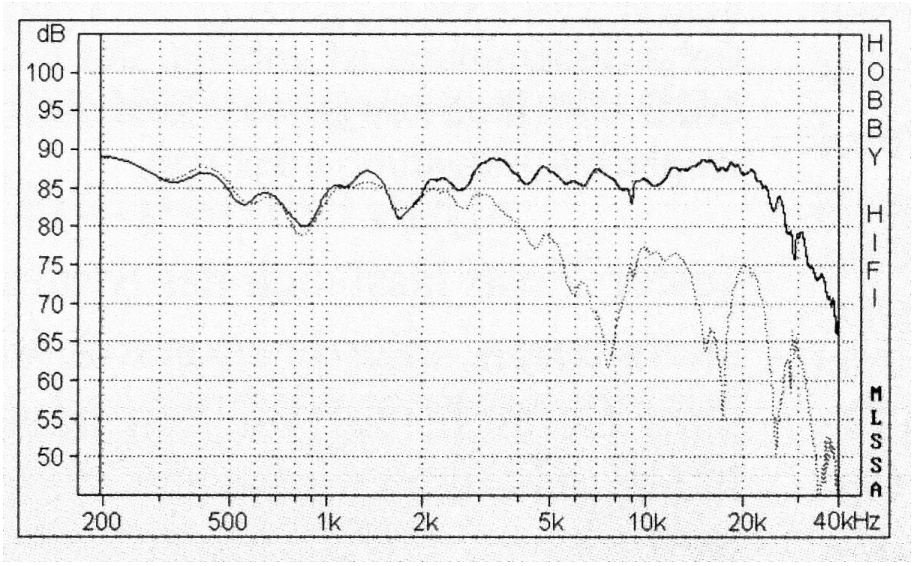


Abbildung 8.26: Amplitudenfrequenzgang des Manger-Schallwandlers (durchgezogen: axial, punktiert: unter 30°), gemessen von Bernd Timmermanns.

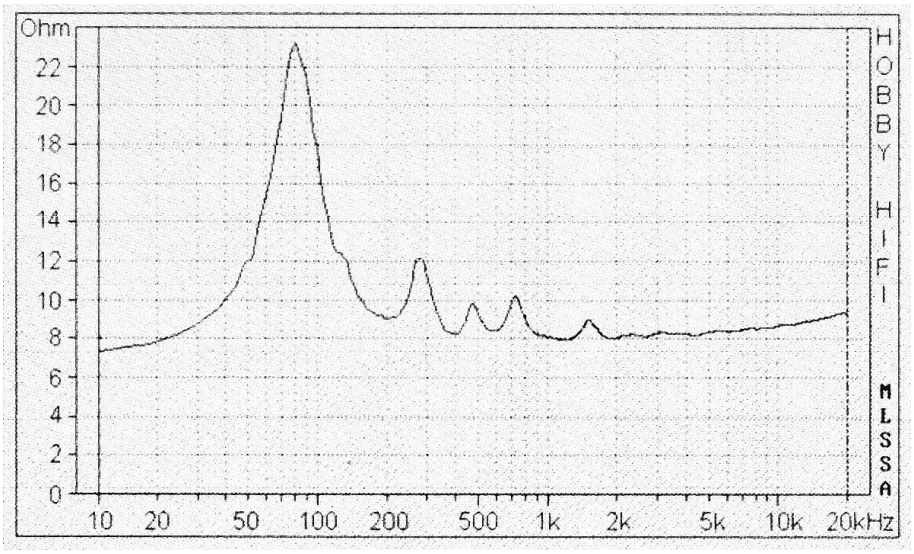


Abbildung 8.27: Impedanzfrequenzgang des Manger-Schallwandlers, gemessen von Bernd Timmermanns

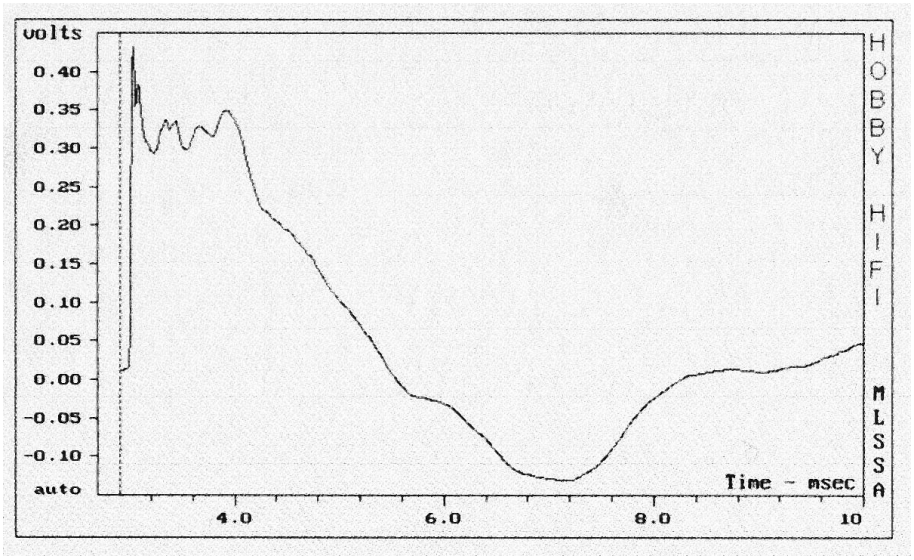


Abbildung 8.28: Sprungantwort des Manger-Schallwandlers, gemessen von Bernd Timmermanns

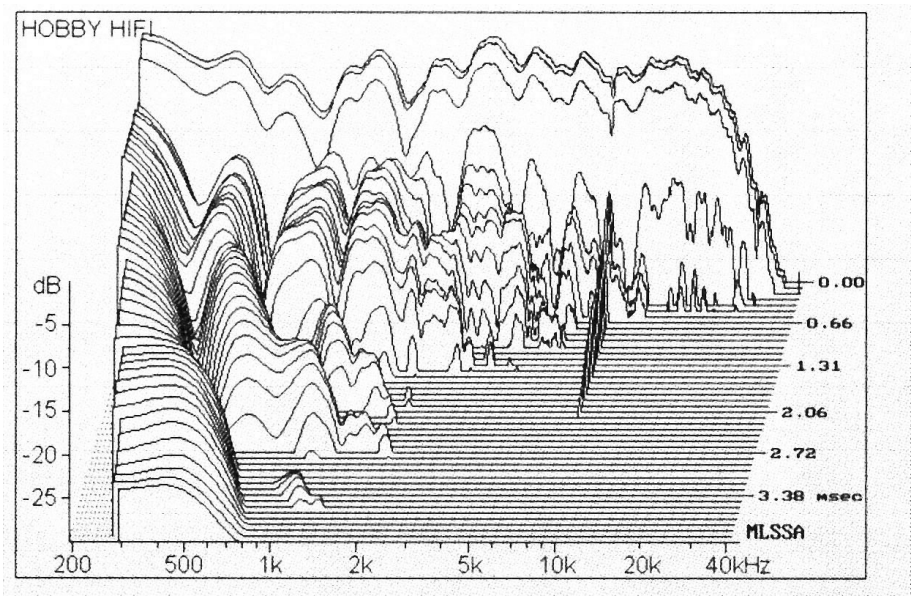


Abbildung 8.29: Wasserfalldiagramm des Manger-Schallwandlers, gemessen von Bernd Timmermanns

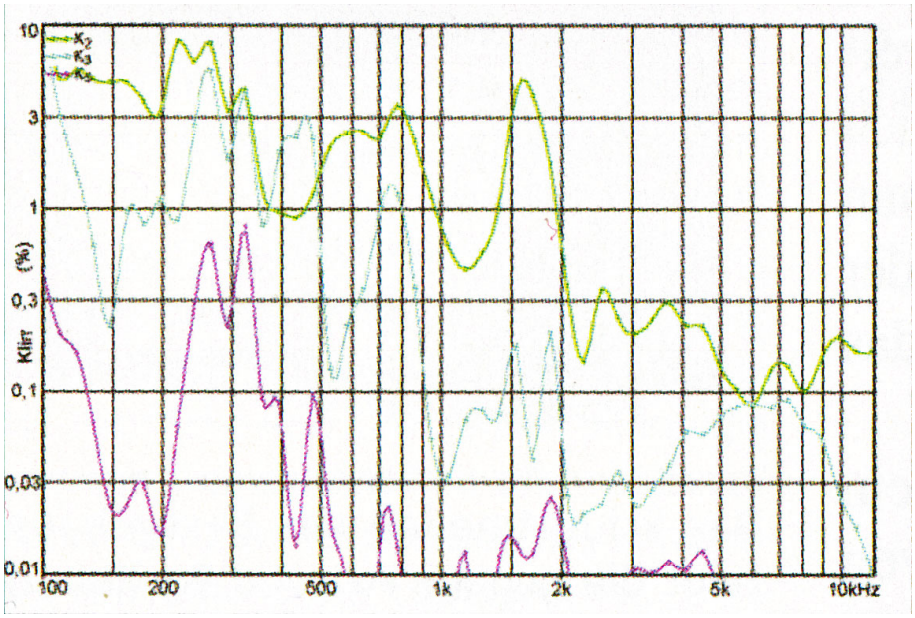


Abbildung 8.30: Klirrfaktor-Frequenzgänge K2, K3 und K5 des Manger-Schallwandlers, gemessen bei 90 dB mittlerem Schalldruckpegel von Bernd Timmermanns

Skalierung der Frequenzgangdiagramme ganz deutlich bei den Messungen zum Vorschein, die Herr Harald Pairits im Rahmen seiner Diplomarbeit am Institut für Breitbandkommunikation der TU-Graz durchgeführt hat (siehe Abbildungen 8.31 bis 8.34). Die Manger-Schallwandler waren dabei in einem Gehäuse montiert, dessen vordere Schallwand Abmessungen aufwies, die dem 'goldenen Schnitt' entsprachen. Zwei markante Einbrüche in den Amplitudenfrequenzgängen bei 800 Hz und bei ca. 1550 Hz sind unter allen gemessenen Winkeln zu sehen. Die Einbrüche sind offensichtlich darauf zurückzuführen, dass an diesen Stellen verschiedene Teile der „Plattenmembran" des Manger-Schallwandlers gegenphasig schwingen. Daher bleiben nur die Abstrahlung durch das Biegewellen-Nahfeld der Platte und Randeffekte übrig.

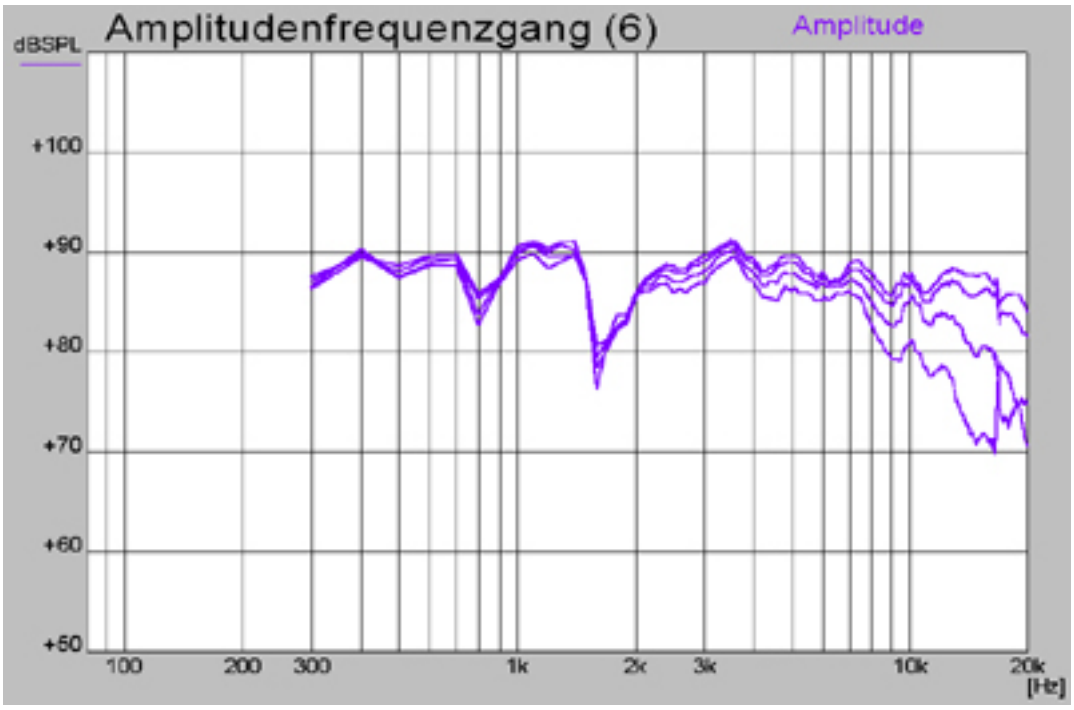


Abbildung 8.31: Amplitudenfrequenzgänge des Manger-Schallwandlers im Winkel von 0, 5, 10 und 15 Grad, gemessen von Harald Pairits

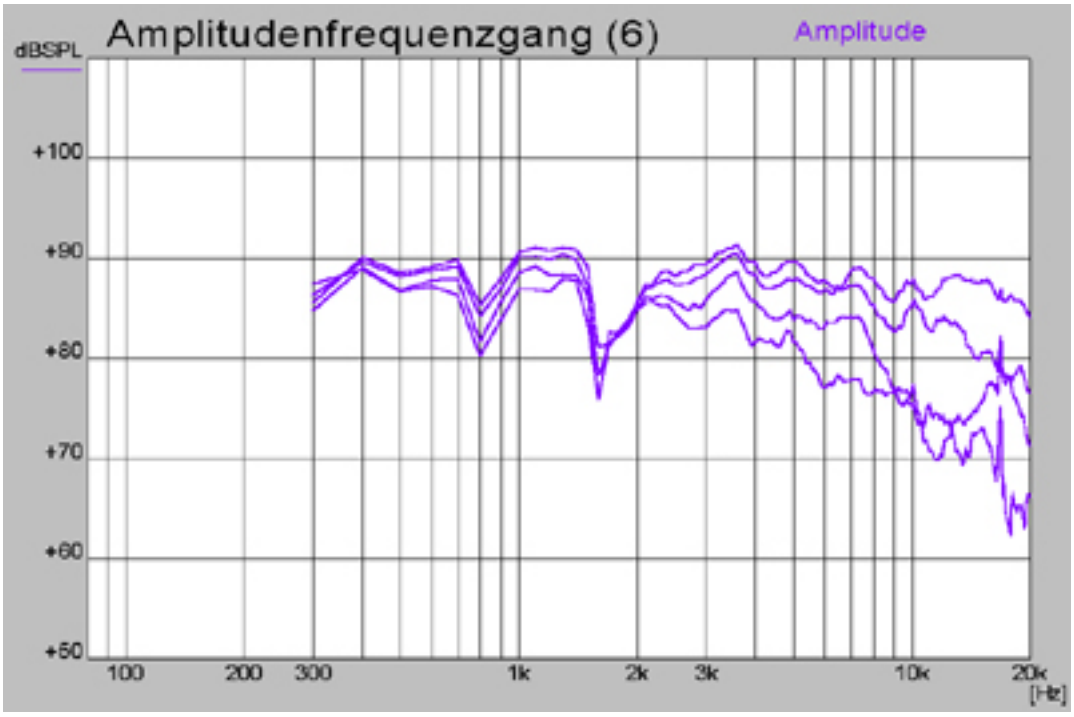


Abbildung 8.32: Amplitudenfrequenzgänge des Manger-Schallwandlers im Winkel von 0, 10, 20 und 30 Grad, gemessen von Harald Pairits

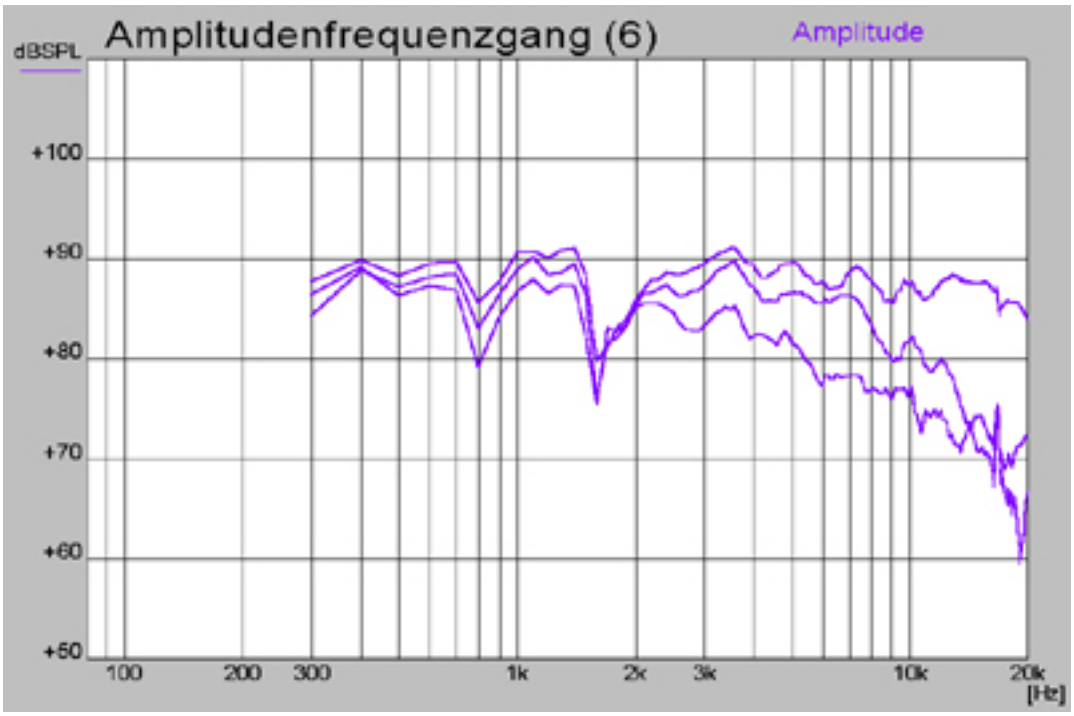


Abbildung 8.33: Amplitudenfrequenzgänge des Manger-Schallwandlers im Winkel von 0, 15 und 30 Grad, gemessen von Harald Pairits

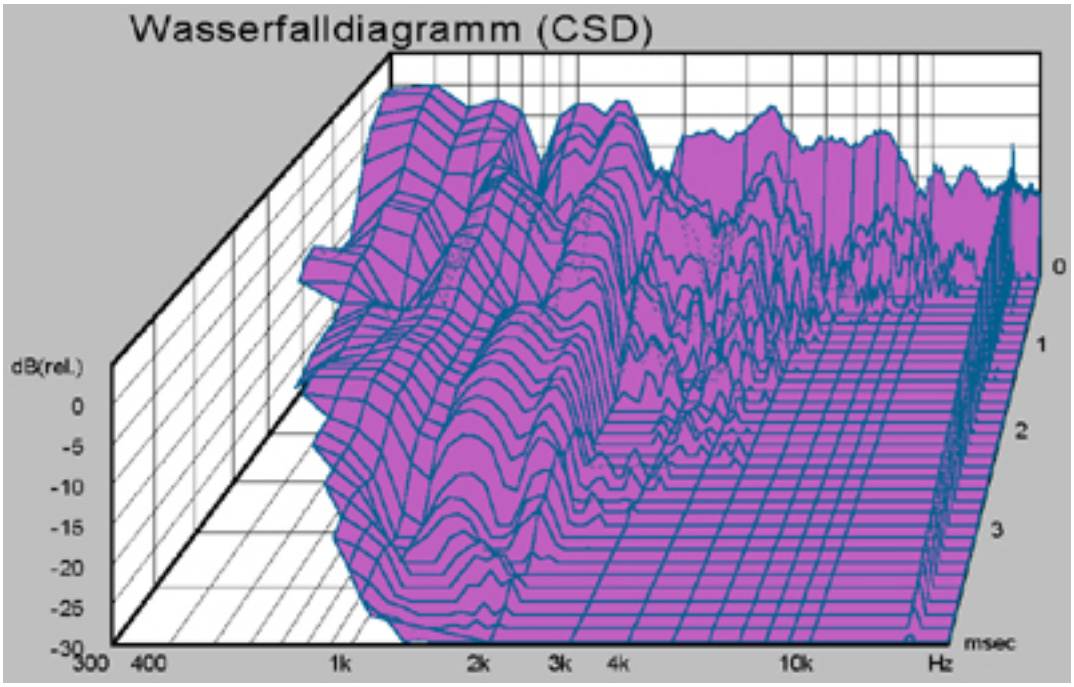


Abbildung 8.34: Wasserfalldiagramm (kumulatives Zerfallsspektrum) des Manger-Schallwandlers, gemessen von Harald Pairits

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Wir wollen nun noch einmal die wesentlichen Schritte bei der Berechnung der Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers rekapitulieren.

Nach grundlegenden Erklärungen zur Festigkeitslehre (Kapitel 3 auf Seite 15) und zur Wellenausbreitung in Festkörpern und Fluiden (Kapitel 4 auf Seite 35) haben wir uns in Kapitel 5 auf Seite 41 mit der Schallabstrahlung von ebenen Strahlern beschäftigt. In diesem Kapitel haben wir gesehen, dass eine ebene Welle auf der Strahlerfläche in der Luft je nach dem Verhältnis von Wellenlänge des Strahlers λ_S zur freien Wellenlänge in Luft λ_0 entweder

- ein exponentielles Nahfeld in der Luft ($\lambda_S < \lambda_0$) oder
- eine sich in der Luft ausbreitende Welle ($\lambda_S > \lambda_0$)

zur Folge hat, wobei die so genannte „Spurwellenlänge“ der Welle in der Luft (die scheinbare Wellenlänge der Welle in der Luft entlang der Oberfläche des Strahlers) gleich der Wellenlänge der Strahlerschnelle λ_S sein muss (siehe Abb. 5.3 auf Seite 46). Daraus ergibt sich ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der Welle des ebenen Strahlers λ_S und dem Winkel, den die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle in der Luft mit der Oberfläche des Strahlers bzw. deren Flächennormale einschließt.
Außerdem haben wir uns überlegt, dass eine beliebige Wellenbewegung des ebenen Strahlers durch Fouriertransformation in eine Überlagerung ebener Wellen zerlegt werden kann. Für jede Teilwelle gelten dabei obige Überlegungen und die gesamte Schallabstrahlung kann aus der Superposition dieser Teillösungen gewonnen werden. Für den rotationssymmetrischen Fall kann die zweidimensionale Fourier-Transformation dabei durch eine einparametrige Hankel-Transformation ersetzt werden.
Weiters haben wir in diesem Kapitel einen Ausdruck für die Strahlungsimpedanz $\underline{Z}_{rad}$ des unendlich ausgedehnten ebenen Strahlers hergeleitet (Gleichung 5.14 auf Seite 51):

$$\underline{Z}_{rad} = \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

Wir haben außerdem (Kapitel 5.4 auf Seite 52) eine Methode entwickelt, wie wir für die unendlich ausgedehnte Platte die Abstrahlung bestimmen können, auch ohne die Bewegung der Platte genau kennen zu müssen. Im Wellenzahlbereich ergab sich dafür die Gleichung 5.21 auf Seite 53:

$$\underline{p}_L(k_x, k_y) = \frac{\underline{Z}_{rad}}{\underline{Z}_W + \underline{Z}_{rad}} \cdot \underline{p}_A(k_x, k_y)$$

Um damit den abgestrahlten Schalldruck zu erhalten, müssen die Strahlungsimpedanz und die Wellenimpedanz der unendlichen Platte bekannt sein. Will man den Schalldruck in Luft bestimmen, berechnet man das Wellenzahlspektrum der anregenden Druckverteilung durch Fourier-Transformation (bzw. im radialsymmetrischen Fall wahlweise auch durch Hankel-Transformation). Man setzt in obige Beziehung ein und transformiert den entstehenden Ausdruck unter Berücksichtigung der Beziehung

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \qquad \text{bei Fourier-Transformation bzw.}$$

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_r^2} \qquad \text{bei Verwendung der Hankel-Transformation}$$

(Gleichung 5.22 auf Seite 53) in den Ortsbereich zurück. Dabei nutzt man die 2D-Fourier-Rücktransformation oder, im radialsymmetrischen Fall, die Hankel-Rücktransformation.

Aufbauend auf der linearisierten Elastizitätstheorie bzw. Festigkeitslehre und der Theorie der einfachen Biegung haben wir in Kapitel 6 die Kirchhoffsche Plattengleichung (6.16 auf Seite 69) hergeleitet, die die Bewegung der dünnen Platte beschreibt:

$$\Delta\Delta\zeta + \frac{m'}{B}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{p}{B}$$

mit den Abkürzungen

$$B = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \quad \ldots \quad \text{Biegesteife der Platte } [Nm]$$

$$m' = \rho \cdot h \quad \ldots \quad \text{Massenbelag } [kg/m^2]$$

In Kapitel 7 auf Seite 71 haben wir dann gesehen, dass im Allgemeinen exponentiell ausklingende Biegewellen-Nahfelder *oder* abstrahlende Wellen auf der Platte auftreten können und dass solche Wellen auf der Platte Dispersion aufweisen (Gleichung 7.3 auf Seite 72):

$$k_B^4 = \omega^2 m'/B \Rightarrow$$
$$c_B = \frac{\omega}{k_B} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{m'}}$$

Dann haben wir die Lösung der Plattengleichung für den Fall der erzwungenen Anregung durch eine Punktkraft gesucht und die Ausbreitungsfunktion (Gleichung 7.21 auf Seite 79)

$$\underline{\zeta} = \underline{C} \cdot \left[\underline{H}_0^{(2)}(k_B r) - \underline{H}_0^{(2)}(-jk_B r)\right] = \underline{\zeta}_0 \cdot \underline{\Pi}(k_B r)$$
$$\underline{\Pi}(k_B r) \ldots \text{Ausbreitungsfunktion}$$
$$k_B \ldots \text{Biegewellenzahl}$$

sowie die Amplitude am Punkt der angreifenden Kraft (Gleichung 7.26 auf Seite 83)

$$\underline{\zeta}_0 = \frac{\underline{F}_a}{8jk_B^2 B}$$

gefunden.

In Kapitel 7.3 auf Seite 83 haben wir die „Eingangsimpedanz“ (Punktimpedanz am Ort der Anregung) zu

$$Z_p = 8\sqrt{B\,m'}$$

bestimmt (Gleichung 7.29 auf Seite 83). Für die unendliche Platte ist dieser Ausdruck erstaunlicherweise frequenzunabhängig und rein reell.

In Kapitel 7.4 auf Seite 83 haben wir die Wellenimpedanz der Kirchhoff-Platte hergeleitet. Sie ergab sich (Gleichung 7.30 auf Seite 84) zu:

$$\underline{Z}_W = \frac{\underline{p}(k_x, k_y)}{\underline{v}(k_x, k_y)} = \frac{B}{j\omega}\left[(k_x^2 + k_y^2)^2 - k_B^4\right] = j\omega m' \left[1 - \frac{(k_x^2 + k_y^2)^2}{k_B^4}\right]$$

In Kapitel 8 beschäftigten wir uns schließlich mit den ebenen Biegewellenwandlern im Allgemeinen (Kapitel 8.1 auf Seite 87) und der Schallabstrahlung des Manger-Schallwandlers im Besonderen (Kapitel 8.2 auf Seite 98).
Die Abstrahlung des Manger-Schallwandlers berechneten wir unter Nutzung der weiter oben beschriebenen Methode mittels Wellenzahlspektrum sowie Strahlungs- und Wellenimpedanz der unendlichen Kirchhoff-Platte. Dieses Vorgehen ist recht geradlinig und lieferte das Rücktransformations-Integral (Gleichung 8.10 auf Seite 102):

$$p(r, z, t) = \frac{j\rho_0}{2\pi B} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{\omega^2 J_0(k_r a)\underline{F}_0(\omega)}{(k_r^4 - k_B^4)\sqrt{k_0^2 - k_r^2}}\, e^{-j\sqrt{k_0^2 - k_r^2}\, z} J_0(k_r r)\, e^{j\omega t} k_r\, dk_r d\omega$$

Wir haben den Ausdruck für k_B eingesetzt und vereinfacht. Das verbleibende Integral wurde noch einmal vereinfacht, um die Rücktransformation möglich zu machen (Gleichung 8.12 auf Seite 102):

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(k_r a) \cdot J_0(k_r r)}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}} \, e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\, z} \, k_r \, dk_r d\omega \approx \frac{-j}{2\sqrt{r^2+z^2}} \, e^{-jk_0\sqrt{r^2+z^2}}$$

um damit schließlich die erstaunliche Erkenntnis zu erlangen, dass unter all den Vereinfachungen, die getroffen wurden, der zeitliche Schalldruckverlauf in einer bestimmten Entfernung vom Wandler, für Winkel nahe der Flächennormalen, gleich dem Verlauf der an der Stelle der Schwingspule wirkenden Kraft ist (Gleichung 8.14 auf Seite 102), nur um die Laufzeit des Schalls von der strahlenden Fläche zum Aufpunkt verzögert:

$$p(r,z,t) = \frac{-\rho_0}{4\pi m' \sqrt{r^2+z^2}} \cdot F_0 \left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{c_0} \right)$$

Damit ergibt sich, unter Voraussetzung der bei der Ableitung der Lösung getroffenen Vereinfachungen, ein glatter Amplitudenfrequenzgang und ein linearer Phasenfrequenzgang des Manger-Schallwandlers, also theoretisch transient perfekte Schallwandlung, unter Abstrahlwinkeln nahe der Flächennormalen.

Anhand der verschiedenen vorhandenen Messungen des Manger-Schallwandlers sahen wir, dass der Frequenz- und Phasengang tatsächlich relativ linear verläuft, es aber in Wirklichkeit zu Resonanzen der „Plattenmembran“ kommt.
Wir postulierten aber, dass mit geeigneten Frequenzweichen und Kolbenmembran-Koaxialchassis ein ähnlich gutes bzw. sogar besseres Ergebnis möglich ist.

9.2 Ausblick

Ein Schritt, die gefundene Lösung etwas zu verfeinern, wäre, das Integral aus Gleichung 8.10 auf Seite 102 numerisch auszuwerten. Bei jeder numerischen Auswertung geht aber die Allgemeinheit der Lösung verloren und man muss sich für bestimmte Parameter entscheiden. Einige Parameter der Platte sind jedoch nicht direkt bekannt.
Die Gesamtmasse der Platte und deren Dicke wären vergleichsweise einfach zu bestimmen. Aus einer zuverlässigen Messung der Dispersionskurve (Phasengeschwindikeit der Wellen auf der Platte in Abhängigkeit von der Frequenz) und oben genannten Daten könnte man dann auch den Biegemodul bestimmen.

Als Nächstes könnte man zu einer endlichen abstrahlenden Fläche übergehen, ohne jedoch noch die exakten Randbedingungen für die Berandung der Platte zu erfüllen. Einerseits hat dieses Vorgehen eine gewisse Berechtigung, da die Dämpfer an der „Plattenmembran“ des Manger-Schallwandlers dafür sorgen sollen, dass sich keine

signifikanten Moden aufbauen können. Andererseits ist die Randbedingung an der Berandung auch gar nicht bekannt und könnte in der Praxis vermutlich nicht durch einen der Spezialfälle (eingespannt, freigestützt oder kräftefrei) beschrieben werden, sondern nur durch eine frequenzabhängige mechanische Impedanz.
Um auf die endliche abstrahlende Fläche überzugehen, müsste man dabei von der Plattenschnelle der durch eine punktförmige Kraft angeregten Platte ausgehen und vor der Transformation in den Wellenzahlbereich dem örtlichen Verlauf eine Dämpfungsfunktion aufmultiplizieren.
Eine andere Möglichkeit, die Dämpfung zu berücksichtigen, wäre die Einführung eines komplexem Schub- und Kompressionsmoduls oder einer komplexen Biegewellenzahl k_B.

Da sich gezeigt hat, dass die Bedämpfung der „Plattenmembran“ des Manger-Schallwandlers nicht groß genug ist, um die Bildung von Moden völlig zu verhindern, scheint es angemessen, sich mit der erzwungenen Schwingung von endlichen radialsymmetrischen dünnen Platten zu beschäftigen.
In der Literatur sind allerdings hauptsächlich Lösungen für radialsymmetrische Membrane (Akustik der Musikinstrumente etc.) oder für rechteckige Platten (Maschinenakustik, Bauakustik) zu finden. Ein Grund für den Mangel an Lösungen für dieses spezielle Problem ist, dass wenig Notwendigkeit für solche Lösungen besteht. Der andere ist, dass die Verwendung von Zylinderkoordinaten in solchen Fällen immer den Gebrauch von Zylinderfunktionen nach sich zieht. Diese sind wesentlich unangenehmer zu handhaben als komplexe Exponentialfunktionen und werden daher nach Möglichkeit gemieden.
Auch hier stellt sich das Problem, dass die genaue Randbedingung an der äußeren Berandung der Platte gar nicht bekannt ist bzw. analytisch nicht berücksichtigt werden kann.

Als letzter Schritt verbleibt dann noch die vollständig numerische Simulation in einem FEM-Programm (engl.: Finite Elements Method, dt.: Finite-Elemente-Methode) oder BEM-Programm (engl.: Boundary Elements Method, dt.: Randelemente-Methode). Dazu sollten allerdings alle Parameter wie Dicke der Platte, Massebelag, Biegesteife bzw. Elastizitätsmodul und Gleitmodul sowie Materialdämpfungen der Platte und auch des sternförmigen Dämpfers genau bekannt sein. In welcher Form die Randbedingung an der äußeren Berandung berücksichtigt werden kann, wäre dann noch zu prüfen.
Im FEM-Programm wird die Platte mit Platten- oder Schalenelementen nachgebildet. Die Abstrahlumgebung muss mitmodelliert werden. Weil man die Abstrahlung ins Unendliche (ohne störende Reflexionen) betrachten will, stehen dazu prinzipiell 2 Möglichkeiten zur Verfügung:

1. Die nahe Abstrahlumgebung wird mit akustischen Fluid-Elementen modelliert und am Fluid-Rand mit sogenannten „Infiniten Finiten Elementen“ abgeschlossen.

2. Das FE- oder BE-Netz, das die Platte repräsentiert, wird mit einem BEM-Verfahren zur Berechnung der Abstrahlung gekoppelt. Die Randelemente-Methode kann die Abstrahlung in ein geschlossenes Gebiet *oder* in den unendlichen, freien Raum berücksichtigen (dies ist inhärent in der Formulierung enthalten).

Hat man durch Anpassung der wichtigen Parameter eine weitgehende Übereinstimmung von Mess- und Simulationsergebnissen erreicht, kann man die Wellenausbreitung des Manger-Schallwandlers und dessen Abstrahlung auf Basis dieser Simulation noch besser verstehen als mit rein analytischen Methoden. Die analytischen Methoden bilden aber ein „Wissens-Gerüst“, das von großem Vorteil ist, wenn man gezielt Verbesserungen an solchen Wandlern erreichen will.

Teil III

Anhang

Anhang A

Mechanische Grundlagen

A.1 Einleitung

In diesem Kapitel sollen grundlegende Aspekte der Mechanik besprochen werden, die in weiterer Folge für die Herleitung der Bewegungsgleichung der Platte von Wichtigkeit sind. Dabei werden die essentiellen Konzepte der Statik und Dynamik (etwa das der Kraft oder des Moments) als bekannt vorausgesetzt.

Man kann mechanische Probleme danach unterscheiden, welche Arten von Körpern sie betreffen

- starre Körper,
- feste Körper oder
- Fluide (flüssige oder gasförmige Stoffe)

und danach, ob diese sich

- in Ruhe oder gleichmäßiger Bewegung befinden (Statik) oder
- beschleunigt werden (Dynamik)

Die Akustik beschäftigt sich mit Ausbreitung von Wellen in festen Körpern oder Fluiden und dem Übergang zwischen den Medien.

Um Aussagen über mechanische Systeme machen zu können, bedient sich die Mechanik des Prinzips des Rundschnittes (komplettes „Freischneiden“ des Systems von allen Bindungen). In der *Statik* können dann die unbekannten Größen durch Aufstellen der Gleichgewichte der Kräfte und Momente an den freigeschnittenen, statisch bestimmten Teilsystemen berechnet werden. Nur dann, wenn sich alle Kräfte und Momente im Gleichgewicht befinden (also die Kraftsumme aller wirkenden Kräfte auf einen Körper und die Momentensumme aller wirkenden Kräfte auf einen Körper

Null ist), ist auch das gesamte System im Gleichgewicht. Wegen der 3 unabhängigen Raumrichtungen gibt es 6 Gleichgewichte im Raum, die erfüllt werden müssen: 3 Kräfte- und 3 Momentengleichgewichte. Bei *statisch unbestimmten Systemen* ist zusätzlich die Kenntnis über die Materialeigenschaften (Elastizität) erforderlich, um mittels der Verträglichkeitsbedingungen (= Kompatibilitätsbedingungen, d. h. nach der Deformation dürfen nirgends Überlappungen oder Klaffungen auftreten) genügend Gleichungen für die Unbekannten zur Verfügung zu haben. Im Falle *kontinuierlicher, elastischer Systeme* (Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase, also ebenfalls statisch unbestimmte Systeme) wird mit einem Schnitt ein differentielles Volumenelement aus dem Kontinuum herausgetrennt und anhand von Betrachtungen an diesem ebenfalls die Gleichgewichte angeschrieben. Lösungen für *dynamische Belastungen* werden oft mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips hergeleitet: Die Trägheit wird als virtuelle Kraft (die „d'Alembertsche Trägheitskraft") eingeführt und das dynamische Problem reduziert sich wieder auf die Aufstellung der Gleichgewichte, genauso wie in der Statik.
Als vollwertiger Ersatz für das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen können auch das „Prinzip der virtuellen Arbeit" oder andere höhere Prinzipien der technischen Mechanik herangezogen werden.

Im Grunde genommen ergeben sich fast alle Sätze in der Mechanik aus den Newton'schen Gesetzen und geometrischen sowie mathematischen Zusammenhängen. Im Laufe der Zeit haben sich jedoch, wie in allen anderen technischen Disziplinen, einige sehr abstrakte Verfahren entwickelt, die es ermöglichen, auch komplizierte Probleme zu handhaben. Ein Zweig dieser „neueren Mechanik" ist die Kontinuumsmechanik. Sie beschäftigt sich, im Gegensatz zur Strukturmechanik, mit dem Verhalten von Kontinua und geht bei Ableitungen meist von den allgemeinen Erhaltungssätzen aus (Masse-, Energie-, Impulserhaltung). Die Vorgehensweise ist dabei stark geprägt von der Verwendung des Tensorkalküls und zielt oft darauf ab, Formulierungen für Finite-Elemente- oder Randelementeverfahren herzuleiten.
Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen der Platte wird daher ein anderer Zugang gewählt, der kein so tiefes Verständnis der Kontinuumsmechanik und Tensorrechnung benötigt, und auch die für das weitere Vorgehen wichtige Linearisierung der Gleichungen bereitstellt: die elementare Festigkeitslehre als „angewandte Elastizitätstheorie". Um die Auseinandersetzung mit dem Begriff des Tensors wird man allerdings nicht gänzlich herum kommen.

A.2 Wichtige Zusammenhänge in der Mechanik

Zunächst werden noch einmal wichtige Ergebnisse der klassischen Mechanik zusammengefasst, die bei der Herleitung der Biegewellengleichung gebraucht werden: der Schwerpunktsatz und der Drallsatz.
Sie stellen zwei vektorielle Differentialgleichungen dar und liefern insgesamt 6 gewöhnliche skalare Diffenentialgleichungen zweiter Ordnung mit der Zeit t als unab-

hängiger Variablen. Die 6 Gleichungen reichen zur Behandlung eines Systems mit 6 Freiheitsgraden, wie es etwa der im Raum frei bewegliche starre Körper ist, aus (vlg. [Parkus 1983], S. 127).

A.2.1 Schwerpunktsatz

Das dynamische Grundgesetz (1. Newtonsches Gesetz) sollte jedem bekannt sein:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{A.1}$$

Es entsteht durch Integration über das Volumen aus der allgemeineren Form.

$$\vec{f} = \rho \cdot \vec{a} \tag{A.2}$$

Diese Form der Gleichung besagt, dass in einem Inertialsystem die Kraftdichte (Kraftintensität, auf das Volumen bezogene Kraft) und die Beschleunigung einander proportional sind!
Der **Schwerpunktsatz** (siehe [Parkus 1983], S. 74 ff.) besagt nun: „Die Schwerpunktsbeschleunigung ist proportional der Resultierenden der äußeren Kräfte“:

$$\boxed{\vec{F}^a = m \cdot \ddot{\vec{x}}_S} \tag{A.3}$$

Dieser Satz gilt sowohl für starre als auch für verformbare Systeme!
Führt man den **Impuls** $\vec{p}$ ein als

$$\vec{p} = \int_m \vec{v}\, dm = m\, \vec{v}_s \tag{A.4}$$

kann man auch formulieren:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res,a} \tag{A.5}$$

„Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte“ (vgl. [Parkus 1983], S. 75).

A.2.2 Drallsatz

Das Massenträgheitsmoment

Das Trägheitsmoment ist ein Massenmoment 2. Ordnung. Massenträgheitsmomente treten im Zusammenhang mit Drehbewegungen von Körpern auf. Sie spielen dort eine ähnliche Rolle wie die Massen bei Translationsbewegungen - wir werden das weiter unten bei der Definition des Drallsatzes sehen.
Für eine einzelne Masse im Abstand r zu der Achse z ist das Trägheitsmoment gleich:

$$\Theta = r^2 \cdot m$$

Für ein System von Massepunkten, die alle dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}_k$ besitzen, sind die Massen zu summieren:

$$\Theta_z = \sum_k m_k \cdot r_k^2$$

Im Falle kontinuierlicher Körper muss über die infinitesimalen Elementarmassen $dm = \rho \cdot dV$ integriert werden

$$\Theta_z = \int_m r^2 \, dm = \rho \int_V r^2 \, dV \tag{A.6}$$

wobei ρ die konstante Dichte des Körpers ist und r der senkrechte Abstand zur Bezugsachse z.
Mit dem **Satz von Steiner** lässt sich das Trägheitsmoment für parallele Achsen angeben:

$$\Theta_0 = \Theta_s + m \cdot s^2 \tag{A.7}$$

Der Drall

Der Drall[1] ist definiert als Moment des Impulses ([Parkus 1983], S. 77):

$$\vec{L} = \int_m \vec{x} \times \vec{v}_{PA} \, dm = \vec{x} \cdot \vec{P} \tag{A.8}$$

Ist die Geschwindigkeit konstant, vereinfacht sich das zu

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{P} \tag{A.9}$$

bzw.

$$L_z = \omega \cdot \Theta_z \tag{A.10}$$

mit Θ_z als Massenträgheitsmoment um die z-Achse.

Der Drallsatz

Weniger bekannt als das Newtonsche Gesetz ist der Drallsatz. Er besagt, dass die zeitliche Änderung des Dralls eines Systems gleich dem Moment der äußeren Kräfte ist (natürlich nur dann, wenn beide auf denselben, raumfesten Punkt bezogen sind):

[1] Der Drall wird auch Drehimpuls oder Impulsmoment genannt und oft mit D oder L abgekürzt

$$\boxed{\dot{L}_0 = \frac{dL}{dt} = M_0^a} \tag{A.11}$$

Der Index 0 soll den Bezug zum Ursprung des Koordinatensystems im Raum deutlich machen. Der Drallsatz hat in Bezug auf den Schwerpunkt dieselbe Form!

Anhang B

Mechanische und akustische Impedanzen

B.1 Mechanische Impedanzen

Bei der Anregung von Körperschall wird immer eine Kraft auf einen Körper ausgeübt und dadurch werden (im linearen Elastizitätsbereich) der Kraft proportionale Bewegungen hervorgerufen. Die mechanische Impedanz Z_m ist daher zweckmäßigerweise definiert worden als das Verhältnis von anregender Kraft zu erzeugter Schnelle am Ort der Anregung:

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{\hat{F}}}{\underline{\hat{v}}}; \quad \underline{A}_m = \frac{\underline{\hat{v}}}{\underline{\hat{F}}} \tag{B.1}$$

Die Unterstreichung deutet an, dass die Größen als komplexe Zeiger aufzufassen sind. Die Eingangsimpedanz wird im Allgemeinen eine komplexe Funktion der Frequenz, da sich der Quotient aus Kraft und Schnelle mit der Frequenz ändert (vergleiche [Cremer und Heckl 1995], S. 263 ff.). Die mechanische Admittanz A_m ist der Kehrwert der Impedanz.

B.1.1 Die Punktimpedanz

Im Vergleich zur Punktmechanik ist die durch Gleichung B.1 definierte Impedanz im Allgemeinen nicht eindeutig, da der „Ort der Anregung“ in der Praxis ein Gebiet ist, innerhalb dessen die Schnelle nicht konstant zu sein braucht. Eine Vereinbarung über den *Ort der Anregung* und die *Kraftverteilung* muss also getroffen werden. Am einfachsten ist dies, wenn die anregende Kraft auf einen *Punkt* konzentriert ist. Die Impedanz bestimmt sich dann aus Kraft und Schnelle am Anregepunkt und wird daher auch Punktimpedanz genannt.
Wann aber kann von einer Punktanregung gesprochen werden? Die Obergrenze ergibt sich, wie so oft in der Technik, aus pragmatischen Gründen durch die Forderung, dass die Abmessungen des unmittelbar angeregten Gebietes wesentlich kleiner sein

sollen als die Wellenlänge im Körper (etwa ein Zehntel derselben). Bei sehr kleinen angeregten Bereichen führt, wegen der endlichen Schubsteife jedes realen Materials, eine auf einen mathematischen Punkt konzentrierte Kraft zu beliebig hohen Drücken und damit auch beliebig hohen - auf ein sehr kleines Gebiet beschränkten - Bewegungen. Daraus ergibt sich in der Praxis eine Untergrenze für die angeregte Fläche. In solchen Fällen muss man dann die anregende Fläche zusammen mit den Punktimpedanzen angeben. Bei der einfachen Biegetheorie (siehe Kapitel 6 auf Seite 57) wird hingegen ohnehin die Annahme einer unendlich hohen Schubsteife getroffen.

B.2 Akustische Impedanzen

B.2.1 Die akustische Impedanz

Die akustische Impedanz (Flussimpedanz) ist definiert als das Verhältnis von Druck p zu (Volumen-)fluss q:

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{p}}{\underline{q}} \tag{B.2}$$

B.2.2 Die Wellenimpedanz

Als weiterer Spezialfall ist neben der Punktimpedanz noch die sogenannte *Wellenimpedanz* Z_W (in anderen Anwendungsfällen als in diesem Text auch *Wand-* oder *Trennimpedanz* genannt) von Bedeutung. Aus [Cremer und Heckl 1995], S. 264: „Diese Größe, die ursprünglich bei der Behandlung von Schalldämmproblemen eingeführt wurde, ist nur für unendlich große, homogene Strukturen definiert. Der Grundgedanke dabei ist, dass bei Strukturen ohne Diskontinuitäten eine *anregende Druckverteilung* $p(x,z) = p_0\, g(x,z)$ eine *Schnelleverteilung* hervorruft, die die *gleiche räumliche Verteilung* aufweist, also $v(x,z) = v_0\, g(x,z)$.“
Die Wellenimpedanz gibt das Verhältnis von anregender Druckverteilung zu erzeugter Schnelle *mit gleicher räumlicher Verteilung* an. Die Voraussetzung dafür, dass diese Verhältnisse überhaupt vorliegen können, ist, dass das Medium unendlich ausgedehnt und homogen ist.

$$\begin{aligned}
&\underline{Z}_W = \frac{\underline{p}_0}{\underline{v}_0} \\
&\text{mit} \\
&\underline{p}(x,y) = \underline{p}_0 \cdot g(x,y) \\
&\underline{v}(x,y) = \underline{v}_0 \cdot g(x,y) \\
&g(x,y) \ldots \text{Hilfsgröße (beliebige Funktion in x und y)}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Im Wellenzahlbereich kann man formulieren:

$$\underline{Z}_W = \frac{\underline{p}(\overline{k})}{\underline{v}(\overline{k})} \tag{B.4}$$

B.2.3 Strahlungsimpedanz

Die *Strahlungsimpedanz* Z_{rad} (rad steht für „radiation“) ist definiert als das Verhältnis von *Schalldruck* zu *Schnelle* an der Strahleroberfläche, im Medium, das den Strahler umgibt:

$$\underline{Z}_{rad} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} \tag{B.5}$$

Im Unterschied zur Wellenimpedanz besteht hier *nicht* die Forderung, dass Druck und Schnelle dieselbe räumliche Verteilung aufweisen müssen! Druck und Schnelle als Funktionen des Ortes werden ebenfalls durch komplexe Werte repräsentiert.

Anhang C

Felder und Tensoren

C.1 Felder

Ein *Feld* ist nichts anderes als die eindeutige Zuordnung einer Größe zu jedem Raumpunkt. Diese Größe kann ein Skalar sein (z. B. beim Temperaturfeld), aber auch eine vektorielle (z. B. beim elektrischen Feld) oder, im Allgemeinen, eine tensorielle Größe (so wie die Dielektrizitätskonstante im anisotropen Medium einen Tensor zweiter Stufe darstellt).
Eine *Feldgröße* ist demnach nichts anderes als eine Größe, die für jeden Raumpunkt einen bestimmten Wert annimmt. In der Praxis werden jedoch zweckmässigerweise Feldgrössen gewählt, die eine möglichst einfache Beschreibung des interessierenden Phänomens erlauben. Dabei müssen so viele Feldgrössen gewählt werden, wie zur eindeutigen Bestimmung der Lösung des Problems notwendig sind. Dabei stellt sich heraus, dass oft ein einfacher Zusammenhang zwischen den gewählten Feldgrössen und der Feldenergie herrscht. Das rührt daher, dass in konservativen Systemen (in denen alle Kräfte aus einer Potentialfunktion berechnet werden können) die Lösung eines Problems auch durch Auffinden des Minimums der sogenannten „Wirkung“ bestimmt werden kann. Die Wirkung, das das Zeitintegral der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie. Das „Prinzip der kleinsten Wirkung“ ist ein fundamentales Prinzip der Physik. Letztendlich basiert auch die Finite-Elemente-Methode in der Variante von Ritz auf diesem Zusammenhang.

C.2 Tensoren

Ein *Tensor* ist eine *richtungsabhängige Größe*. Die Anzahl der unabhängigen Richtungen legt die Stufe des Tensors fest. Ein Tensor n-ter Stufe ist dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Koordinatensystem 3^n Zahlen (die sogenannten Koordinaten) definiert sind, durch deren Angabe die Größe eindeutig bestimmt ist. Außerdem besteht für Tensoren ein ganz bestimmtes Verhalten bei einer Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes (siehe auch [Papousek 1982]). Das hat damit

zu tun, dass Tensoren meist reale physikalische Größen beschreiben, die unabhängig vom „Betrachter“ und der Wahl des Koordinatensystems existieren.
Nach zweckmäßiger Konvention werden Skalare auch als Tensoren nullter Stufe bezeichnet. Vektoren sind Tensoren erster Stufe. Tensoren zweiter Stufe sind in der Mechanik recht häufig anzutreffen, aber auch Tensoren höherer Stufen sind gebräuchlich.

Anhang D

Zylinderfunktionen

Ganz allgemein sind Zylinderfunktionen[1] ($C_\nu(z)$) Funktionen der i. A. komplexen Variable z und des Parameters ν, die die folgende Rekursionsgleichung erfüllen:

$$C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\, C_\nu(z)$$
$$C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z) = 2\, C'_\nu(z)$$

Sie treten in der Technik sehr oft bei Lösungen von zylindersymmetrischen Problemen auf (so wie die Legendre-Gleichung oft in Fällen von Kugelsymmetrie auftritt). Diese Klasse von Funktionen können durch Bessel-Funktionen ausgedrückt werden, weswegen die Bessel-Funktionen selbst oft als Synonym für Zylinderfunktionen verwendet werden[2]. Die Abkürzungen der Bessel-Funktionen, die wir nachfolgend verwenden werden, sind heute gebräuchlich, jedoch ist die Schreibweise durchaus nicht einheitlich.

D.1 Die Besselsche Differentialgleichung

Bessel-Funktionen treten als Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \qquad \text{mit } \nu \in \mathbb{R}$$

auf und sind durch etliche verschiedene Ausdrücke darstellbar. Diese sind in jeder besseren Formelsammlung enthalten.

D.1.1 Bessel-Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$

Ist der Parameter ν nicht ganzzahlig, kann eine Basis der Besselschen Differentialgleichung als Linearkombination der Bessel-Funktionen 1. Art J_ν und $J_{-\nu}$ gebildet

[1] siehe Eric W. Weisstein. „Cylinder Function.“ From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CylinderFunction.html

[2] Der klassische Text zum Thema Bessel- bzw. Zylinderfunktionen ist „A Treatise On The Theory of Bessel-Functions“ von G. N. Watson. Z. B. Cambridge University Press, 1922 (!).

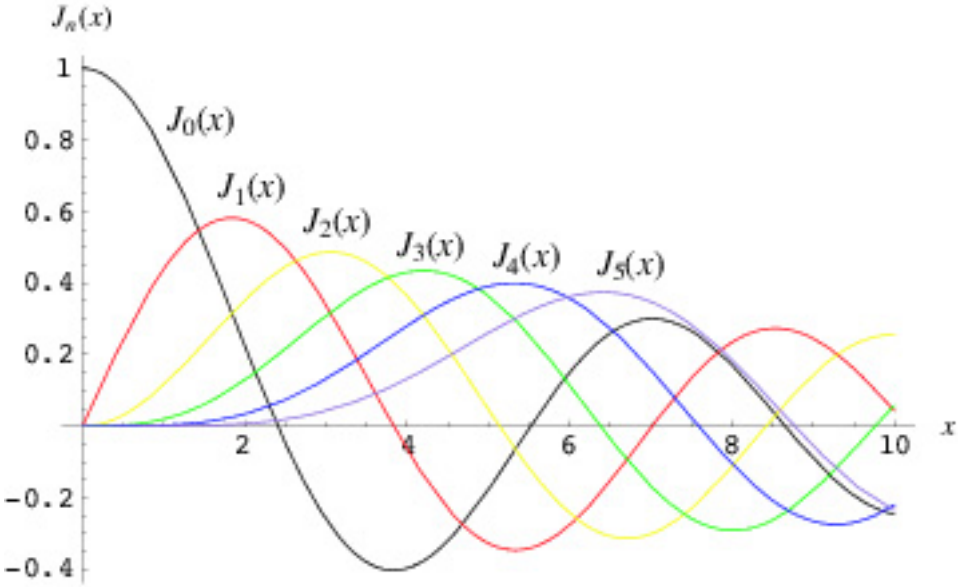


Abbildung D.1: Bessel-Funktionen der 1. Art ($J_\nu(x)$)

werden, da diese dann nicht linear abhängig sind:

$$y(x) = C_1\, J_\nu(x) + C_2\, J_{-\nu}(x)$$

Bessel-Funktionen $J_\nu(x)$ mit $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$ werden *elementare Besselfunktionen* oder *sphärische Besselfunktionen* genannt. Sie lassen sich durch endlich viele Ausdrücke von $\sin(\ldots), \cos(\ldots), x^n$ darstellen.
Ist ν ganzzahlig (also $\nu \in \mathbb{N}_0$), schreibt man üblicherweise $J_n(x)$ anstatt $J_\nu(x)$.

D.1.2 Bessel-Funktionen 2. Art $Y_\nu(x)$

Ist der Parameter ν ganzzahlig, sind J_ν und $J_{-\nu}$ keine linear unabhängigen Funktionen mehr. Man kann aber eine Basis als Linearkombination der Bessel-Funktionen erster und zweiter Art anschreiben:

$$y(x) = C_1\, J_\nu(x) + C_2\, Y_{-\nu}(x)$$

In diesem Fall muss aber $Y_n(x)$ als Grenzwert aufgefasst werden:

$$\begin{aligned} Y_\nu &= \frac{1}{\sin(\nu\pi)} \cdot [J_\nu(x)\, \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)] \\ Y_n(x) &= \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) \end{aligned}$$

Die Bessel-Funktionen 2. Art der Ordnung ν werden oft als Weber-Funktionen oder auch Neumann-Funktionen $N_\nu(x)$ der Ordnung ν bezeichnet.

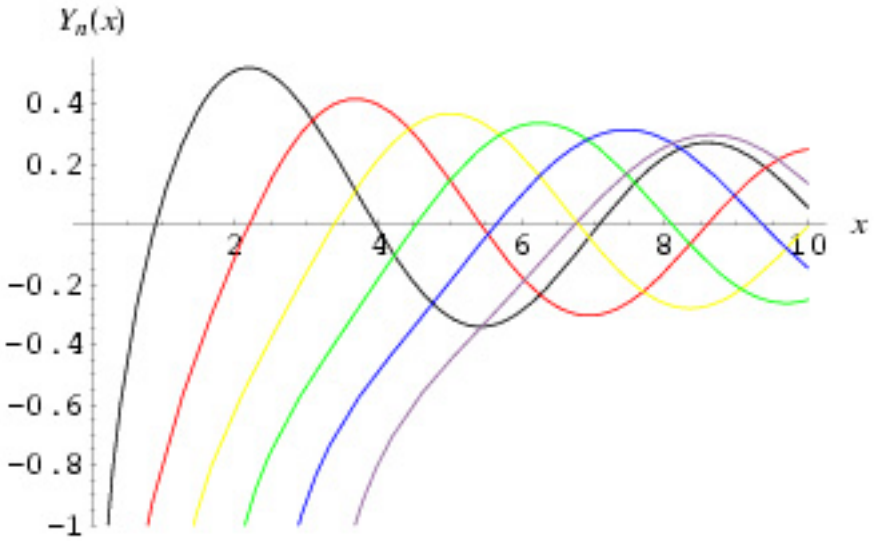


Abbildung D.2: Bessel-Funktionen der 2. Art ($Y_\nu(x)$)

Anmerkung: Auch die Bessel-Funktionen 2. Art existieren für nicht-ganzzahlige ν. Ersetzt man in einer Basis von Lösungen, die aus zwei Bessel-Funktionen 1. Art besteht, eine davon durch eine Bessel-Funktion 2. Art, so entsteht wieder eine Basis! Das bedeutet, man kann eine allgemeine Lösung für die Bessel-Differentialgleichung mit Hilfe obiger Formel anschreiben (siehe weiter unten). Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ schreibt man üblicherweise $Y_n(x)$.

D.1.3 Die Hankel-Funktionen $H_\nu(x)$

Es gibt praktische Anwendungsfälle für Lösungen der Bessel-Gleichung, die komplex sind für reelle Werte von x. Zu diesem Zweck werden oft die Lösungen

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + i\,Y_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - i\,Y_\nu(x) \end{aligned} \tag{D.1}$$

benutzt.
Diese linear unabhängigen Funktionen werden 1. und 2. Hankel-Funktion der Ordnung ν oder Bessel-Funktionen 3. Art der Ordnung ν genannt.

D.1.4 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = \underline{C}_1\, J_\nu(x) + \underline{C}_2\, Y_\nu(x) \tag{D.2}$$

oder, angeschrieben mit Hankel-Funktionen:

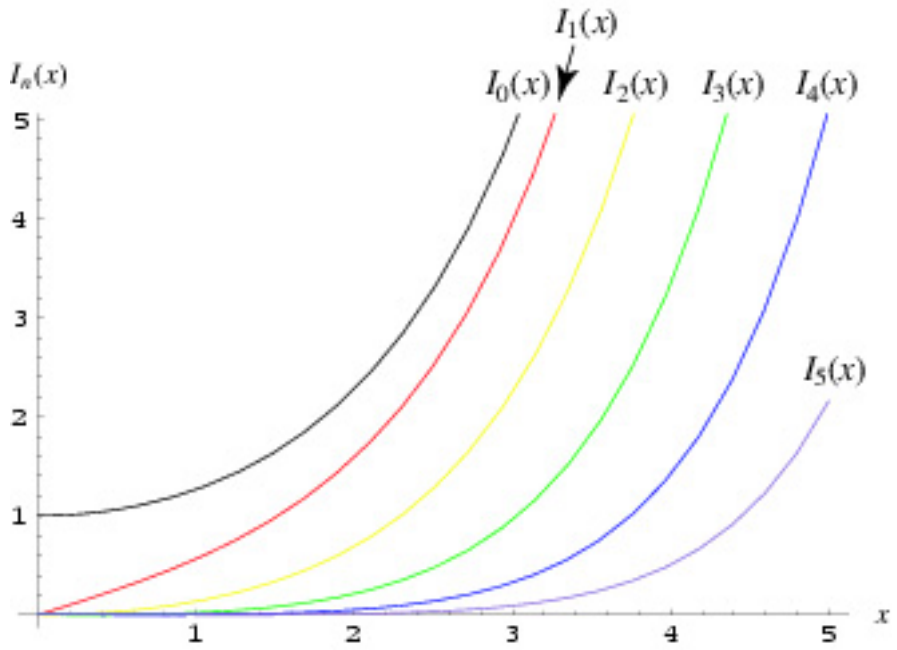


Abbildung D.3: Modifizierte Bessel-Funktionen der 1. Art ($I_\nu(x)$)

$$y(x) = \underline{C}_1\, H_\nu^{(1)}(x) + \underline{C}_2\, H_\nu^{(2)}(x) \tag{D.3}$$

D.2 Die modifizierte Besselsche Differentialgleichung

Modifizierte Bessel-Funktionen treten, was nicht weiter verwunderlich ist, als Lösungen der *modifizierten* Besselschen Differentialgleichung

$$x^2\, y'' + x\, y' - (x^2 + \nu^2)\, y = 0 \qquad \text{mit } \nu \in \mathbb{R}$$

auf.

D.2.1 Modifizierte Bessel-Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$

Modifizierte Bessel-Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ bilden eine Teillösung der modifizierten Bessel-Gleichung. Zwischen der Bessel-Funktion 1. Art und ihr gilt folgender Zusammenhang:

$$I_n(x) = i^{-n}\, J_n(ix)$$

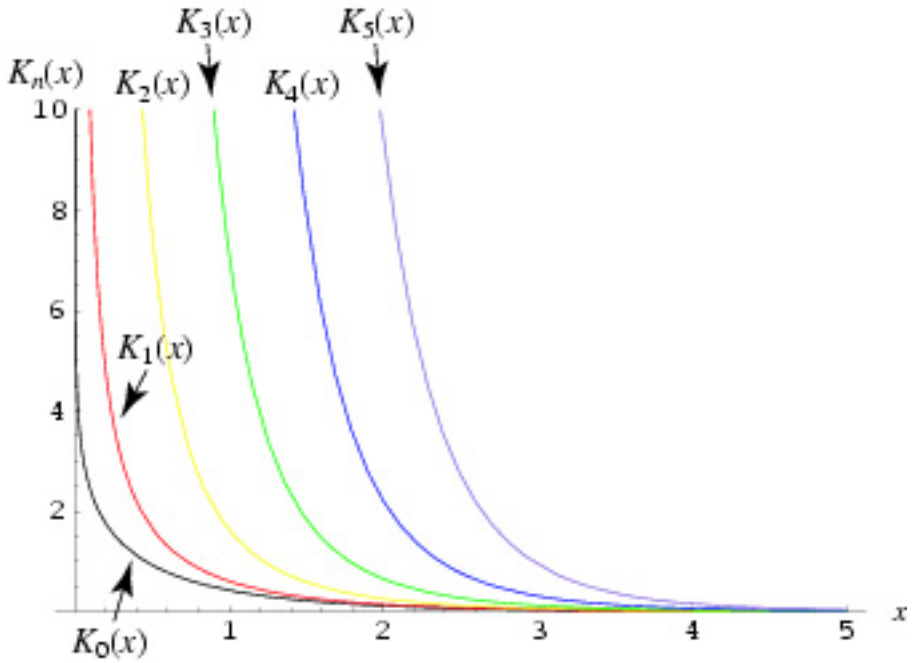


Abbildung D.4: Modifizierte Bessel-Funktionen der 2. Art ($K_\nu(x)$)

D.2.2 Modifizierte Bessel-Funktionen 2. Art $K_\nu(x)$

Auch die modifizierten Bessel-Funktionen zweiter Art bilden eine Teillösung der modifizierten Bessel-Gleichung. Interessanterweise werden sie manchmal auch Basset-Funktionen, modifizierte Bessel-Funktionen dritter Art oder MacDonald-Funktionen genannt.
Zwischen ihnen und der Hankel-Funktion 1. Art gilt folgender Zusammenhang:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$

D.2.3 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung der modifizierten Bessel-Differentialgleichung ergibt sich ganz äquivalent zu Gleichung D.2:

$$y(x) = \underline{C}_1 I_n(x) + \underline{C}_2 K_n(x) \tag{D.4}$$

Anhang E

Integraltransformationen

E.1 Einleitung

Bei vielen Problemen der Ingenieurspraxis lassen sich erfolgreich Integraltransformationen einsetzen. Im Folgenden rekapitulieren wir kurz einige Charakteristika dieser Methode.
Gegeben sei eine Differentialgleichung (Kurzschreibweise: DGl.) in der abstrakten Form:

$$D[f] = 0$$

Die Integraltransformation einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$F\{f(x)\} = \bar{f}(\xi) = \int_a^b f(x)\, K(\xi, x)\, dx$$

mit $K(\xi, x)$ als dem so genannten „Kern“. Die Anwendung dieser Transformation auf die erste Gleichung, d. h.

$$\bar{D} = F\{D\}$$

liefert eine DGl, die unter gewissen Umständen von einfacherer Art ist. Ist nun $\bar{f}$ eine Lösung von

$$\bar{D}[\bar{f}] = 0$$

so ist die Rücktransformierte, also

$$f = F^{-1}\{\bar{f}\}$$

eine Lösung der DGl oben.

Bekannte Beispiele für derartige Integraltransformationen sind z. B. die Fourier-, die Laplace- und eben auch die Hankeltransformation, die wir noch besprechen werden.

E.2 Die Fourier-Transformation

E.2.1 Eindimensionale Fourier-Transformation

In der Technik am meisten verbreitet ist die Verwendung der Fourier-Transformation einer zeitabhängigen Funktion $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt && \ldots \quad \text{Hintransformation} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega && \ldots \quad \text{Rücktransformation} \end{aligned} \tag{E.1}$$

Der Bildbereich $F(\omega)$ wird dann *(Frequenz-)Spektrum* genannt, die unabhängige Variable die *Frequenz*.

Ebenso kann aber die Funktion einer Ortsvariablen $f(x)$ transformiert werden, dann spricht man vom *Wellenzahlspektrum*. Die unabhängige Variable ist die *Ortsfrequenz* oder *Wellenzahl*, oft mit k bezeichnet:

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-jkt}\, dx && \ldots \quad \text{Hintransformation} \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{jkt}\, dk && \ldots \quad \text{Rücktransformation} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \tag{E.2}$$

Wichtiger Hinweis: Manchmal wird der Faktor $1/2\pi$ von der Rücktransformation auf je einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ bei Hin- und Rücktransformation aufgeteilt. In der theoretischen Akustik wird auch oft das Vorzeichen im Exponenten bei Hin- und Rücktransformation vertauscht (wie etwa in [Davies 2001] und auch in [Cremer und Heckl 1995] bei der Herleitung der Abstrahlung von ebenen Strahlern, der wir folgen wollen). Im Prinzip sind die Ergebnisse nach beiden Transformationen dann dieselben, man muss nur Acht geben, dass man sich bei der Transformation einer Variablen strikt an eine Konvention hält und nicht im Verlauf der Herleitung 2 Definitionen miteinander vermischt (Vorsicht auch beim Nachschlagen in Tabellenwerken und bei der Nutzung moderner Computeralgebra-Software!). Ganz allgemein lassen sich die Transformationen schreiben als:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\pm j\omega t}\, dt && \ldots \quad \text{Hintransformation} \\
f(t) &= b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{\mp j\omega t}\, d\omega && \ldots \quad \text{Rücktransformation} \\
\text{mit } a \cdot b &= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

Definiert man als Kerne der Hintransformationen $e^{\pm 2\pi j\,\omega t}$ und den der Rücktransformation als $e^{\mp 2\pi j\,\omega t}$, so verschwinden die Konstanten a und b:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\pm 2\pi j\omega t}\, dt && \ldots \quad \text{Hintransformation} \\
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{\mp 2\pi j\omega t}\, d\omega && \ldots \quad \text{Rücktransformation}
\end{aligned}
\tag{E.4}
$$

E.2.2 Mehrdimensionale Fourier-Transformation

Die eindimensionale Fourier-Transformation kann leicht auf mehrere Dimensionen erweitert werden. Die zweidimensionale Fourier-Transformation kann als 2 aufeinanderfolgende eindimensionale Fourier-Transformationen berechnet werden. Die Transformationsbeziehungen lauten dann:

Hintransformation:

$$
F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dxdy \tag{E.5}
$$

Komplexes Umkehrintegral:

$$
f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{ic_1-\infty}^{ic_1+\infty} F(k_x, k_y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dk_x dk_y \tag{E.6}
$$

E.3 Die Hankel-Transformation

Eine rotationssymmetrische Funktion hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab. Somit kann sie mittels einer Funktion auf der positiven Halbachse beschrieben werden (nur *eine* unabhängige Variable). In solchen Fällen kann die 2D-Fourier-Transformation zu einer 1D-Transformation reduziert werden. Die 1D-Transformation ist in diesem Fall bekannt als die *Hankel-Tranformation*:

$$F(k) = \int_0^\infty f(r) J_0(kr)\, r\, dr \tag{E.7}$$

$$f(r) = \int_0^\infty F(k) J_0(kr)\, k\, dk \tag{E.8}$$

Dazu muss man wissen: Für eine rotationssymmetrische Funktion $\hat{u}(r, j) = u_r(r)$ ist auch das Spektrum rotationssymmetrisch: $\hat{U}(R, F) = U_R(R)$. Eine kurze Herleitung findet sich in [Davies 2001], S. 227 ff. Durch die zirkulare Symmetrie der Funktion im Ortsraum reduziert sich also die 2D-Fourier-Transformation auf eine 1D-Hankel-Transformation 0.Ordnung.

Literaturverzeichnis

[Altenbach und Altenbach 1994] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : Teubner, 1994

[Altrichter 1999] ALTRICHTER, Hans: *Schallwandlerprinzipien am Beispiel von Schallsendern*, Technische Universität Graz, Diplomarbeit, 1999

[Berger 1994] BERGER, Joachim: *Technische Mechanik für Ingenieure*. Bd. 2: Festigkeitslehre. Braunschweig / Wiesbaden : Vieweg & Sohn, 1994

[Brillouin 1952] BRILLOUIN, M. J.: Problèmes de rayonnement en acoustique du bâtiment. In: *Acustica* 2 (1952), Nr. 2

[Butz 2000] BUTZ, Tilman: *Fouriertransformation für Fußgänger*. Zweite Auflage. Leipzig : Teubner, 2000

[Cremer und Heckl 1995] CREMER, Lothar ; HECKL, Manfred: *Körperschall*. Zweite Auflage. Berlin / Heidelberg / New York : Springer, 1995

[Cremer und Huber 1990] CREMER, Lothar ; HUBER, Matthias: *Vorlesungen über Technische Akustik*. Vierte Auflage. Berlin : Springer, 1990

[Cremer und Müller 1976] CREMER, Lothar ; MÜLLER, Helmut A.: *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*. Bd. 2: Teil 4 - Wellentheoretische Raumakustik. Zweite Auflage. Stuttgart : Springer, 1976

[Cremer und Müller 1978] CREMER, Lothar ; MÜLLER, Helmut A.: *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*. Bd. 1: Teil 1 - Geometrische Raumakustik, Teil 2 - Statistische Raumakustik, Teil 3 - Psychologische Raumakustik. Zweite Auflage. Stuttgart : Springer, 1978

[Davies 2001] DAVIES, Brian: *Texts in Applied Mathematics*. Bd. 41: *Integral Transforms and Their Applications*. Dritte Auflage. New York / Berlin / Heidelberg : Springer, 2001

[Firma German Physiks 1994] FIRMA GERMAN PHYSIKS. *DDD Biegewellenwandler*. Infobroschüre der Firma Hifisound. 1994

[Firma Manger] FIRMA MANGER. *Werbematerial*

[Goossens u. a. 2002] GOOSSENS, Michel ; MITTELBACH, Frank ; SAMARIN, Alexander: *Der LaTeX Begleiter*. München : Pearson Studium, 2002

[Gösele 1953] GÖSELE, K.: Schallabstrahlung von Platten die zu Biegeschwingungen angeregt sind. In: *Acustica* 3 (1953), Nr. 4

[Heckl 1959] HECKL, M.: Schallabstrahlung von Platten bei punktförmiger Anregung. In: *Acustica* 9 (1959), Nr. 5

[Heckl und Müller 1995] HECKL, M. ; MÜLLER, H. A.: *Taschenbuch der technischen Akustik*. Zweite Auflage. Berlin / Heidelberg / New York : Springer, 1995

[Heckl 1978] HECKL, Manfred. *Brief an die Firma Manger*. Homepage der Firma Manger. 1978

[Kollmann 1993] KOLLMANN, Franz G.: *Maschinenakustik*. Berlin / Heidelberg / New York : Springer, 1993

[Lenk 1975a] LENK, Arno: *Elektromechanische Systeme*. Bd. 1: Systeme mit konzentrierten Parametern. Dritte Auflage. Berlin : VEB Verlag, 1975a

[Lenk 1975b] LENK, Arno: *Elektromechanische Systeme*. Bd. 2: Systeme mit verteilten Parametern. Erste Auflage. Berlin : VEB Verlag, 1975b

[Lenk 1975c] LENK, Arno: *Elektromechanische Systeme*. Bd. 3: Systeme mit Hilfsenergie. Berlin : VEB Verlag, 1975c

[Manger 1978] MANGER, Daniela. *Preprint zum Vortrag vor der ASA*. Homepage der Firma Manger. 1978

[Möser 1988] MÖSER, Michael: *Analyse und Synthese akustischer Spektren*. Berlin / Heidelberg / New York : Springer, 1988

[Niedermair und Niedermair 2003] NIEDERMAIR, Elke ; NIEDERMAIR, Michael: *LaTeX - Das Praxisbuch*. Poing : Franzis', 2003

[Papousek 1982] PAPOUSEK, Walter. *Vektor-Tensor-Rechnung*. Skriptum. 1982

[Papousek 1992] PAPOUSEK, Walter. *Vektor-Tensor-Rechnung*. Skriptum. 1992

[Parkus 1983] PARKUS, Heinz: *Mechanik der festen Körper*. Zweite Auflage. Wien / New York : Springer, 1983

[Rieg und Hackenschmidt 2000] RIEG, Frank ; HACKENSCHMIDT, Reinhard: *Finite Elemente Analyse für Ingenieure*. München / Wien : Carl Hanser, 2000

[Stephan und Postl 1995] STEPHAN, W. ; POSTL, R.: *Schwingungen elastischer Kontinua*. Stuttgart : Teubner, 1995

[Waubke 2003] WAUBKE, Holger. *Theoretische Akustik*. Powerpoint Folien. 2003

[Weselak und Graber 2001] WESELAK, Werner ; GRABER, Gerhard. *Raumakustik*. Skriptum. 2001

[Westphal 1954] WESTPHAL, Wolfgang: Zur Schallabstrahlung einer zu Biegeschwingungen angeregten Wand. In: *Acustica* 2 (1954)

[Ziomek 1995] ZIOMEK, Lawrence J.: *Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing*. Boca Raton / Ann Arbor / London / Tokyo : CRC Press, 1995

[Zollner und Zwicker 1998] ZOLLNER, M. ; ZWICKER, E.: *Elektroakustik*. Korrigierter Nachdruck der dritten Auflage. Berlin / Heidelberg / New York : Springer, 1998