

# **Das Kundtsche Rohr**

## **Matlab-Simulation unter Berücksichtigung von Mehrfachreflexionen**

### **Projektarbeit**

durchgeführt von

**Holger Hiebel**

Institut für Breitbandkommunikation  
der Technischen Universität Graz

Fachbereich Wellenausbreitung

Interimistischer Leiter: o. Prof. Dr. Gernot Kubin

Betreuer : Ao. Univ. Prof. Dr. techn. DI Gerhard Graber

Graz, im Oktober 2005

# Zusammenfassung

Der Inhalt dieser Arbeit ist die Erweiterung einer bereits bestehenden Matlab<sup>®</sup>-Simulation des so genannten „Kundtschen Rohres“. Das Kundtsche Rohr ist eine Messvorrichtung, die der Bestimmung von Absorptionsgraden akustischer Werkstoffe dient. Die ursprüngliche Version der Software entstand im Rahmen einer Projektarbeit am Institut für Breitbandkommunikation der technischen Universität Graz und wurde von Jonathan Frick entwickelt. Diese Weiterführung der Arbeit von mir entsteht im Rahmen eines Toningenieur-Projekts.

Als Zielvorgaben wurden folgende Punkte herausgearbeitet:

- Die bisher der klassischen Theorie folgende Simulation soll in Zukunft optional auch Reflexionen von der Quellseite zurück in das Rohr berücksichtigen
- Die grafische Benutzeroberfläche soll übersichtlicher gestaltet werden
- Die Simulation soll, wenn möglich, beschleunigt werden

Weiters sollten am Kundtschen Rohr des Institutes für Breitbandkommunikation Messungen durchgeführt werden, um Vergleiche zwischen der Simulation und der Realität anstellen zu können. Eine gefällige Messdaten-Darstellung der an Stellen im Abstand von 2,5 cm im Rohr gemessenen Impulsantworten und Frequenzgänge sollte ebenfalls in Matlab<sup>®</sup> erstellt werden.

Diese Dokumentation gliedert sich in 4 Abschnitte:

- Im ersten Abschnitt wird erklärt, was das Kundtsche Rohr ist und wie es funktioniert. Danach werden die theoretischen Grundlagen und die simulierten physikalischen Modelle (ebene Welle, Kugelwelle, Kolbenmembran) erläutert.
- Der zweite Abschnitt befasst sich mit der Simulation der genannten Modelle. Dabei wird der prinzipielle Aufbau und Simulationsablauf erklärt, und auf programmspezifische mathematische Zusammenhänge eingegangen.
- Im dritten Abschnitt wird die Benutzeroberfläche und die Anwendung des Matlab<sup>®</sup>-Programms erklärt, ohne auf dafür unnötige technische Details einzugehen.
- Der vierte Abschnitt zeigt einige charakteristische Messergebnisse und vergleicht sie mit der Simulation

Im Anhang sind die gesamten Quellcodes abgedruckt.

# Inhalt

1	Grundlagen.....	4
1.1	Das Kundtsche Rohr.....	4
1.2	Physikalische Modelle.....	4
1.2.1	Der Schalldruck im Rohr.....	5
1.2.2	Die Schallschnelle.....	6
1.2.3	Reflexion an einer Grenzfläche.....	8
1.2.4	Dämpfung im Rohr.....	11
1.2.5	Mehrfachreflexion im Rohr.....	13
1.3	Schallfeldimpedanzen.....	28
1.3.1	Die Kugelwelle.....	28
1.3.2	Die kreisförmige Kolbenmembran.....	29
2	Simulation in Matlab.....	31
2.1	Allgemeines.....	31
2.1.1	Orts- und Zeitdiskretisierung.....	31
2.1.2	Frequenzänderung.....	33
2.1.3	Dämpfung.....	34
2.1.4	Reflexion.....	34
2.2	Der Simulationsablauf.....	36
2.3	Anpassung an Benutzereingaben.....	36
2.3.1	Änderung der Frequenz- Auflösungsanpassung.....	36
2.4	Darstellung.....	37
2.4.1	Longitudinalwellendarstellung:.....	37
2.4.2	Darstellung der ebenen Welle.....	37
2.4.3	Darstellung der Kugelwelle.....	38
2.4.4	Darstellung der Kolbenmembranabstrahlung.....	38
3	Programmbeschreibung.....	40
3.1	Das Hauptfenster.....	40
3.2	Einstellmöglichkeiten.....	43
3.2.1	Buttons.....	43
3.2.2	Parameter-Schieberegler und Eingabefelder.....	44
3.2.3	Auswahl der Rohr-Abschlüsse.....	45
3.2.4	Checkbox-Optionen.....	45
3.3	Settings Dialog.....	46
3.4	Diagramme.....	47
3.4.1	Funktionsdiagramme.....	47
3.4.2	Reflexionsfaktor.....	47
3.4.3	Abstrahlungsdarstellung.....	48
4	Messung am Rohr.....	49
4.1	Das Darstellungs-Tool.....	49
4.1.1	Das Menü.....	50
4.1.2	Darstellungs-Optionen.....	51
4.1.3	Settings Dialog.....	54
4.2	Messergebnisse.....	56
4.2.1	Allgemeines.....	56
4.2.2	Stehwellen, Resonanzen.....	57
4.2.3	Resonanzverschiebung.....	59
5	Anhang.....	70
5.1	Literatur.....	70
5.2	Quellcodes.....	70

# 1 Grundlagen

## 1.1 Das Kundtsche Rohr

Das Kundtsche Rohr ist eine Röhre, deren Durchmesser im Vergleich zur Länge klein ist. Es wird zur Messung des Absorptionsgrades verschiedener Materialien verwendet.

Am einen Ende befindet sich die Schallquelle (meist ein Lautsprecher, dessen Membran etwa den gleichen Durchmesser wie das Rohr hat). Das andere Ende wird gewöhnlich mit dem Material abgeschlossen, dessen Reflexionsfaktor bzw. Absorptionsgrad gemessen werden soll:



Abhängig vom Reflexionsfaktor des zu messenden Materials wird die auf das Ende des Rohres zulaufende Welle dort reflektiert. Die Überlagerung der hin- und der rücklaufenden Welle ergibt eine so genannte „stehende Welle“. Aus den Minima und Maxima dieser messbaren Überlagerung beider Wellen lässt sich der Reflexionsfaktor, und damit auch der Absorptionsgrad, bestimmen.

## 1.2 Physikalische Modelle

Luft kann näherungsweise als linear kompressibles, reibungsfreies Fluid beschrieben werden. Aus

- der Kontinuitätsgleichung,
- der Eulerschen Bewegungsgleichung und
- der Adiabatangleichung

kann für den Fall kleiner Druckänderungen unter Vernachlässigung der konvektiven Beschleunigung und Linearisierung der Adiabatangleichung sowohl für den Druck als auch für die Schnelle (die beiden wichtigsten Zustandsgrößen in der Akustik) die Wellengleichung hergeleitet werden.

Die allgemeine Gleichung **Wellengleichung** in n Dimensionen lautet:

$$\boxed{c^2 \cdot \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  Lösungsfunktion

$c$  ..... Konstante (Phasengeschwindigkeit der Welle)

$\Delta$  ..... Laplace-Operator

Für diese Gleichung gibt es zwei klassische Lösungsansätze:

D'Alembertsche Lösungsansatz  
Methode nach Bernoulli

## 1.2.1 Der Schalldruck im Rohr

Die meist interessierende Größe bei der Schallausbreitung ist der Schalldruck  $p(x,t)$ . Als Schalldruck  $p$  bezeichnet man den sich zeitlich (schnell) ändernden Anteil des Luftdrucks. Der Gleichanteil des Luftdrucks, auch atmosphärischer Druck genannt, ist viel größer als der Schalldruck, wirkt sich auf die Wellenausbreitung aber nur indirekt als Dichte aus.

Im nutzbaren Frequenzbereich breitet sich im Kundtschen Rohr näherungsweise nur eine ebene Welle entlang des Rohres ( $x$ -Richtung) aus. Dadurch reduziert sich die allgemeine Gleichung auf die eindimensionale Wellengleichung. Mit der Schallgeschwindigkeit als Konstante  $c$  ergibt sich diese Wellengleichung für den Schalldruck:

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

(Alle anderen Ortsableitungen werden Null.)

D'Alembert hat herausgefunden, dass sich die allgemeine Lösung der Wellengleichung als Überlagerung einer vorlaufenden (hinlaufenden) und einer rücklaufenden Welle schreiben lässt:

$$p(x,t) = F_h(ct - x) + F_r(ct + x)$$

(„D'Alembertscher Lösungsansatz“). Dabei können  $F_h$  und  $F_r$  beliebige stetige Funktionen sein, die erste und zweite Ableitungen besitzen. Für einen Punkt konstanter Phase der Funktion  $F_h$  ( $ct-x = \text{const.}$ ) sieht man durch Ableiten nach der Zeit, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit in positive  $x$ -Richtung zeigt (hin- oder vorlaufend). Bei der Funktion  $F_r$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in negative  $x$ -Richtung (rücklaufend).

Geht man bei der harmonische Welle auf komplexe Schreibweise über, lässt sich für den Schalldruck schreiben:

$$\underline{p} = \underline{p}_h + \underline{p}_r = \overbrace{\left( \underbrace{\hat{p}_h \cdot e^{-jkx}}_{\text{vorlaufend}} + \underbrace{\hat{p}_r \cdot e^{jkx}}_{\text{rücklaufend}} \right)}^{\text{örtliche Schwingung}} \cdot \overbrace{e^{j\omega t}}^{\text{zeitliche Schwingung}}$$

Laut Übereinkunft interessieren dabei nur die Realteile. Für die vorlaufende Welle gilt dann:

$$p(x,t) = \hat{p} \cdot \operatorname{Re}\left\{e^{jk(ct-x)+\varphi}\right\} = \hat{p} \cdot \cos(k \cdot (ct - x) + \varphi)$$

$\hat{p}$  .....Spitzenwert des Schalldruckes

$k$  .....Konstante (Wellenzahl)

$\varphi$  .....Phase zum Zeitpunkt  $t = 0$

Formal ist die Wellengleichung für jedes beliebige  $k$  erfüllt. Sinnvoll erscheint, dass der zeitabhängige Term  $kc = \omega$  gewählt wird, wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz  $2\pi \cdot f$  bezeichnet.  $f$  ist hierbei die Frequenz in Hertz.

Daraus folgt:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot f}{c}$$

mit  $c = \lambda \cdot f$  folgt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\lambda$  .....Wellenlänge

Durch diese Wahl für  $k$  ergeben sich dann aus dem ortsabhängigen Term für durch  $\lambda$  ganzzahlig teilbare  $x$ -Werte Punkte gleicher Phase.

## 1.2.2 Die Schallschnelle

Als Schallschnelle wird die Teilchengeschwindigkeit des schwingenden Mediums bezeichnet. Sie ist im Gegensatz zur Phasengeschwindigkeit (die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle), die meistens einfach als Schallgeschwindigkeit bezeichnet wird, zeitlich veränderlich. Der Effektivwert dieser zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit wird die Größe  $v$  zugeordnet und als Schallschnelle bezeichnet. Die Eulersche Bewegungsgleichung liefert den Zusammenhang zwischen Schalldruck und Schallschnelle.

Die allgemeine Form der **Euler'schen Bewegungsgleichung** lautet:

$$\boxed{-\nabla p = \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Da die Ausbreitung im Kundtschen Rohr auf die  $x$ - Richtung eingeschränkt wird, vereinfacht sie sich zu:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

$v_x$  ..... $x$ - Komponente der Schallschnelle

Durch Integration nach t erhält man:

$$v_x = -\frac{\partial \int p \cdot dt}{\rho \partial x}$$

Für den vorlaufenden Term einer *harmonischen* Welle

$$p = \hat{p} \cdot \cos([k(ct - x) + \varphi])$$

folgt:

$$\begin{aligned} \int p \cdot dt &= \frac{\hat{p}}{kc} \cdot \sin([k(ct - x) + \varphi]) \\ \frac{\partial \int p \cdot dt}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\hat{p}}{kc} \cdot \sin([k(ct - x) + \varphi]) = \\ &= \frac{-k\hat{p}}{kc} \cdot \cos([k(ct - x) + \varphi]) = -\frac{\hat{p}}{c} \cdot \cos([k(ct - x) + \varphi]) = -\frac{p}{c} \end{aligned}$$

Somit gilt für den Fall, dass  $Z_0$  reell ist (Verlustfreies Medium), folgende Beziehung

$$v_x = -\frac{\frac{p}{c}}{\rho} = \frac{p}{c \cdot \rho} = \frac{p}{Z_0}$$

Somit ist ersichtlich, dass bei der eindimensionalen Ausbreitung (hinlaufende ebene Welle) die Schallschnelle  $v_x$  proportional zum Schalldruck  $p$  ist. Der im Allgemeinen komplexe Proportionalitätsfaktor  $c \cdot \rho$  wird als Schallkennimpedanz  $Z_0$  bezeichnet, ist eine Materialkonstante und stellt den Wellenwiderstand des Mediums für die ebene Welle dar. Außerdem ist erkennbar, dass Druck und Schnelle gleichphasig alternieren.

Falls  $Z_0$  komplex ist (z.B. Medium mit Verlusten durch viskose Reibung), muss auch der imaginäre Anteil von  $\underline{p}$  berücksichtigt werden.

Dadurch ergibt sich folgende Beziehung für die vorlaufende Welle:

$$\boxed{\underline{v}_x = \frac{\underline{p}}{Z_0}}$$

Für die rücklaufende ebene harmonische Welle ergibt in analoger Ableitung:

$$\boxed{\underline{v}_{-x} = -\frac{\underline{p}}{Z_0}}$$

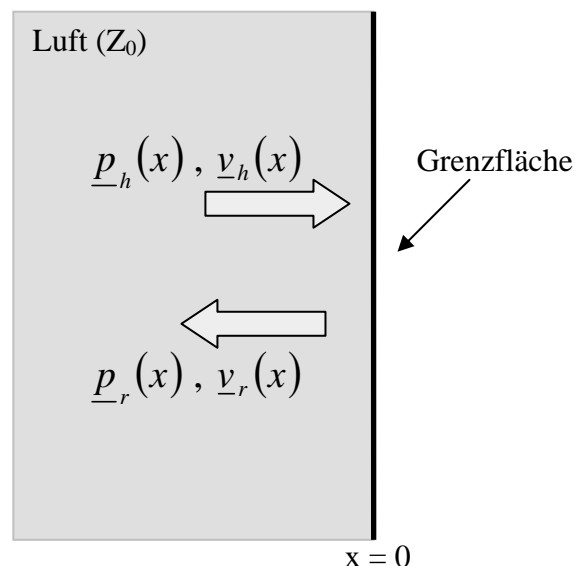
## 1.2.3 Reflexion an einer Grenzfläche

### 1.2.3.1 Die Wandimpedanz

Treffen Wellen auf Grenzflächen so können sie im Allgemeinen gebeugt, reflektiert / gestreut und gebrochen werden. Was genau passiert ist eine Frage der Wellenfront, der Geometrie und der Randbedingungen für die Feldgrößen Druck und Schnelle an diesen Grenzflächen.

Ist man nur an der Rückwirkung der Grenzfläche interessiert, benötigt man die Randbedingungen nicht einzeln, sondern nur deren Quotienten vor der Grenzfläche. Dieser Quotient aus Schalldruck und Schallschnelle an der Grenzfläche wird, in Analogie zur Elektrotechnik, „Wandimpedanz“ genannt. Läuft eine harmonische, ebene Welle senkrecht auf eine ebene Grenzfläche („Wand“) zu, dann ist die Wandimpedanz eine komplexe Konstante (also nur frequenzabhängig):

$$\underline{W} = \frac{\underline{p}(0)}{\underline{v}(0)} = \frac{\underline{p}_h(0) + \underline{p}_r(0)}{\underline{v}_h(0) + \underline{v}_r(0)}$$



Aus der Wandimpedanz lassen sich dann der Reflexionsfaktor und daraus wiederum der für die statistische Raumakustik so interessante Absorptionsgrad bestimmen.

### 1.2.3.2 Der Reflexionsfaktor

Die akustischen Eigenschaften einer Oberfläche können außer durch die Wandimpedanz auch durch den Reflexionsfaktor beschrieben werden. Beide sind komplexe Größen und lassen sich im Falle lokal wirksamer Oberflächen leicht ineinander umrechnen.

Der Reflexionsfaktor ist als das Verhältnis der reflektierten zur hinlaufenden Welle definiert:

$$\underline{r}(x) = \frac{\underline{p}_r(x)}{\underline{p}_h(x)}$$

Am interessantesten ist dieser Wert an jenem Punkt an dem der Impedanzwechsel stattfindet, da dort die Aufteilung der Schallenergie der hinlaufenden Welle in eine reflektierte und eine transmittierte Welle stattfindet. Meist wird das Koordinatensystem so gewählt, dass  $x$  in diesem Punkt den Wert 0 annimmt.



$$\underline{r}_0 = \underline{r}(0) = \frac{\underline{p}_r(0)}{\underline{p}_h(0)}$$

### 1.2.3.3 Die reflektierte (rücklaufende) Welle

Zunächst kommt eine reflektierte Welle überhaupt erst, wenn sich die Wandimpedanz von der Schallkennimpedanz in Luft ( $Z_0$ ) unterscheidet.

$$\underline{W} = \frac{\underline{p}(0)}{\underline{v}(0)} = \frac{\underline{p}_h(0) + \underline{p}_r(0)}{\underline{v}_h(0) + \underline{v}_r(0)} = \frac{\underline{p}_h(0) + \underline{p}_r(0)}{\underline{p}_h(0) - \underline{p}_r(0)} \cdot Z_0 = \frac{1 + \underline{r}_0}{1 - \underline{r}_0} \cdot Z_0$$

aufgelöst nach  $\underline{r}_0$  ergibt sich das „komplexe Anpassungsgesetz“:

$$\underline{r}_0 = \frac{\underline{W} - Z_0}{\underline{W} + Z_0}$$

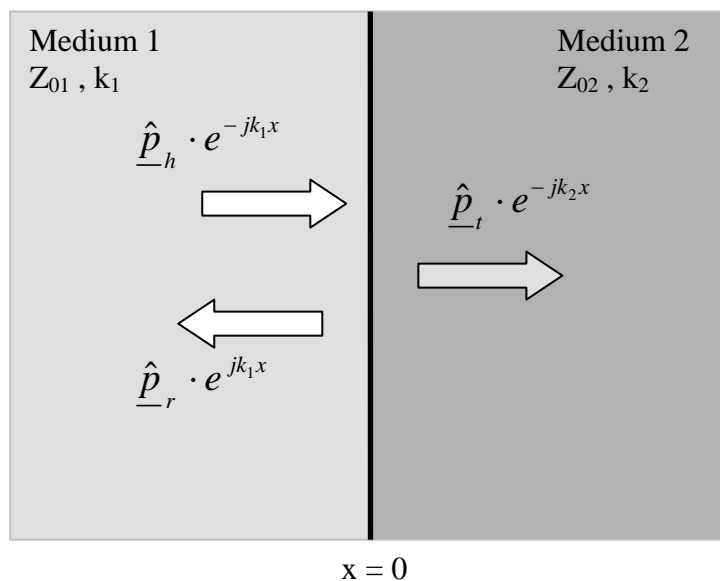
Ein Impedanzsprung kann erfolgen durch

- einen Mediumswechsel
- akustische Elemente (Resonatoren, aktive Elemente) oder
- aufgrund der Tatsache, dass sich die Art der Ausbreitung ändert

Am offenen Rohrende etwa ist letzteres der Fall, weil der ursprünglich durch den Rohrmantel zur eindimensionalen Ausbreitung gezwungenen Welle plötzlich alle drei Raumrichtungen zur Verfügung stehen.

### 1.2.3.4 Der Mediumswechsel

Erreicht die ebene Schallwelle eine Stelle an der die Schallkennimpedanz einen anderen Wert annimmt, wird sie dort teilweise reflektiert und teilweise transmittiert:



Als Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle ergibt sich für den **Schalldruck**:

$$\begin{array}{l} \text{im Medium 1} \\ \underline{p}_1 = \underline{p}_{1h} + \underline{p}_{1r} = \underline{p}_h + \underline{p}_r \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{im Medium 2} \\ \underline{p}_2 = \underbrace{\underline{p}_{2h}}_{=\underline{p}_{2t}} + \underbrace{\underline{p}_{2r}}_{=0} = \underline{p}_t \end{array}$$

und für die **Schallschnelle**:

$$\begin{array}{l} \text{im Medium 1} \\ \underline{v}_1 = \underline{v}_{1h} + \underline{v}_{1r} = \underline{v}_h + \underline{v}_r \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{im Medium 2} \\ \underline{v}_2 = \underbrace{\underline{v}_{2h}}_{=\underline{v}_{2t}} + \underbrace{\underline{v}_{2r}}_{=0} = \underline{v}_t \end{array}$$

An der Grenzfläche gelten **2 Randbedingungen**:

- 1.) Der Schalldruck kann sich nicht sprunghaft ändern  
(Gleichheit von Kraft und Gegenkraft, Newtonsches Gesetz)  $\underline{p}_1(x=0) = \underline{p}_2(x=0)$
- 2.) Die Schallschnelle kann sich nicht sprunghaft ändern.  
(Kontinuität des Schallflusses, Massenerhaltung)  $\underline{v}_1(x=0) = \underline{v}_2(x=0)$

Eliminiert man man in Randbedingung 2 die Schnellen, indem man sie mit den Schallkennimpedanzen durch die Drücke ausdrückt (Euler-Beziehung, harmonische Welle):

$$\hat{v}_1 = \hat{v}_2 \Leftrightarrow \hat{v}_t = \hat{v}_h + \hat{v}_r \Rightarrow \frac{\hat{p}_t}{Z_{02}} = \frac{\hat{p}_h - \hat{p}_r}{Z_{01}} \Rightarrow \hat{p}_t = (\hat{p}_h - \hat{p}_r) \cdot \frac{Z_{02}}{Z_{01}}$$

setzt dann in Randbedingung 1 ein und löst nach  $\hat{p}_r$  auf:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 \Leftrightarrow \hat{p}_h + \hat{p}_r = \hat{p}_t \Rightarrow \hat{p}_t = \hat{p}_h + \hat{p}_r = (\hat{p}_h - \hat{p}_r) \cdot \frac{Z_{02}}{Z_{01}}$$

ergibt sich:

$$\boxed{\hat{p}_r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \cdot \hat{p}_h = \underline{r}_0 \cdot \hat{p}_h}$$

Hier sieht man, dass die Wandimpedanz beim Mediumswechsel der Schallkennimpedanz des zweiten Mediums entspricht. Ist das zweite Medium verlustbehaftet, so ist die Schallkennimpedanz (und damit auch die Wandimpedanz für diesen Fall) komplex.

Das geschlossene Rohrende stellt den Spezialfall  $Z_{02} = \infty$  dar, die Welle wird vollständig und gleichphasig reflektiert ( $r_0$  wird 1, Totalreflexion).

Betrachtet man die Beziehung

$$\underline{v}_{x,r} = -\frac{\underline{p}_r}{Z_0} = -\frac{r_0 \cdot \underline{p}_h}{Z_0} = -\frac{1 \cdot \underline{p}_h}{Z_0} = -\frac{\underline{p}_h}{Z_0} = -\underline{v}_{x,h}$$

ist erkennbar, dass die Schallschnelle dabei gegenphasig reflektiert wird.

### 1.2.3.5 Die Stehwelle

Der Druck im Rohr setzt sich also aus hin- und rücklaufender Welle zusammen. Amplitude und Phase der rücklaufenden Welle lassen sich aus der hinlaufenden Welle mit Hilfe des Reflexionsfaktors ausdrücken:

$$\begin{aligned} \underline{p}(x,t) &= \underline{p}_h + \underline{p}_r = \\ &\hat{\underline{p}}_h \cdot e^{-jkx} \cdot e^{j\omega t} + \hat{\underline{p}}_r \cdot e^{jkx} \cdot e^{j\omega t} = \\ &\left( \hat{\underline{p}}_h \cdot e^{-jkx} + \hat{\underline{p}}_r \cdot r_0 \cdot e^{jkx} \right) \cdot e^{j\omega t} = \\ &\underbrace{\hat{\underline{p}}_h \cdot \left( e^{-jkx} + r_0 \cdot e^{jkx} \right)}_{\text{örtliche Schwingung}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{zeitliche Schwingung}} \end{aligned}$$

Üblicherweise ist man am Zeitverlauf des Druckes überhaupt nicht interessiert. Außerdem zeigen die meisten Messgeräte den Effektivwert ( $p_{eff}$ ) oder die Amplitude, also der Betrag (bei harmonischen Schwingungen gleich  $\sqrt{2} \cdot p_{eff}$ ), der Schwingung an einem Ort an:

$$\boxed{\underline{p}(x) = \hat{\underline{p}}_h \cdot \left( e^{-jkx} + r_0 \cdot e^{jkx} \right)}$$

Dass der gemessene Wert dabei in Wirklichkeit an jedem Ort auch noch sinusförmig schwankt, wird als bekannt vorausgesetzt.

Da die Amplitude selbst ein wellenartiges Bild ergibt, spricht man von einer „stehenden Welle“ oder „Stehwelle“. Aus der Lage des ersten Minimums und dem sog. Stehwellenverhältnis des (messbaren) Betrages von  $\underline{p}(x)$  lässt sich auch der komplexe Reflexionsfaktor bestimmen.

### 1.2.4 Dämpfung im Rohr

Bei der Wellenausbreitung im Rohr gibt es auch eine Dämpfung durch Reibungsverluste an der Rohr-Innenwand. Ist Kundtsche Rohr homogen, nimmt der Schalldruck der Welle an jedem Punkt des Rohres um denselben Bruchteil ab. Es handelt sich also um einen klassischen exponentiellen Zusammenhang.

Die Einhüllenden der hin- bzw. rücklaufenden Wellen sind:

$$\begin{aligned} p_h(x) &= e^{-\gamma x} \\ p_r(x) &= e^{\gamma x} \end{aligned}$$

$\gamma$  ..... Dämpfungsbelag [Np/m]

Bemerkung:

Wie das Dezibel ist das Neper eine Einheit basierend auf einer logarithmischen Skala. Der Unterschied besteht darin, dass das Bel den Logarithmus zur Basis 10 nutzt während das Neper den Logarithmus zur Basis  $e$ , also den natürlichen Logarithmus, nutzt ( $e$  ... Eulersche Zahl,  $e \approx 2.71828182846\dots$ ).

Der Wert eines Verhältnisses in Neper, Np, ist gegeben durch:

$$Np = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$$

Wobei  $x_1$  und  $x_2$  die Werte von Interesse sind und  $\ln$  der natürliche Logarithmus.

Das Neper wird meist dazu benutzt Verhältnisse, etwa die von Spannungen oder Strömen, auszudrücken, während das Dezibel benutzt wird, um Leistungsverhältnisse auszudrücken.

$$1 Np = \frac{20}{\ln 10} dB \approx 8.686 dB$$

Wie das Dezibel auch, ist Neper eine dimensionslose Einheit.

Der Schalldruck im dämpfungsbehafteten Rohr ist mit berücksichtigter Zeitabhängigkeit somit:

$$\underline{p}(x, t) = \underline{\hat{p}}_h \cdot e^{j(\omega t - kx)} \cdot e^{-\gamma x} + \underline{\hat{p}}_r \cdot e^{j(\omega t + kx)} \cdot e^{\gamma x}$$

Dämpfungsmaß und Phasenmaß lassen sich zu einer komplexen Wellenzahl  $\underline{k}$  zusammenfassen. Damit kann man schreiben:

$$\underline{p}(x, t) = \underline{\hat{p}}_h \cdot e^{j(\omega t - \underline{k}x)} + \underline{\hat{p}}_r \cdot e^{j(\omega t + \underline{k}x)}$$

## 1.2.5 Mehrfachreflexion im Rohr

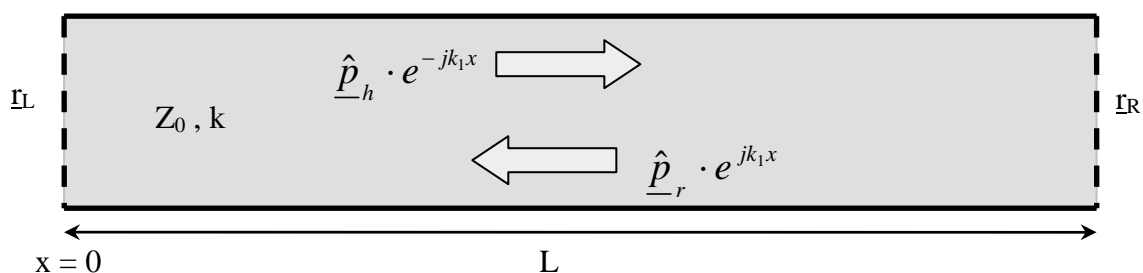
Bei der Diskussion der Reflexion einer harmonischen Welle an ebener Grenzfläche und bei der Stehwelle sind wir davon ausgegangen, dass eine harmonische Welle „von links“ aus dem unendlichen auf die Wand zuläuft und die reflektierte, also rücklaufende Welle, wieder nach links ins Unendliche weiterläuft. In der Realität ist dies natürlich höchstens näherungsweise der Fall, keinesfalls aber in unserem Modell, bei dem am linken Ende noch ein Lautsprecher in einer Wand montiert ist.

Man mag sich jetzt fragen, warum die Senderseite bei den Überlegungen bisher nicht berücksichtigt wurde. Die Frage ist eigentlich berechtigt – aber selbst wenn sich hin- und rücklaufende Welle aus einzelnen Termen zusammensetzen, die durch wiederholte Reflexionen in das Rohr zurück entstehen, bleibt die Randbedingung am Rohrende (Abschluss rechts) für den eingeschwungenen Zustand unverändert:

Die Gesamtlösung wird sich auch dann aus einer hin- und einer rücklaufenden Welle zusammensetzen. Beide bestehen zwar jeweils aus der Superposition von harmonischen Wellen, die durch wiederholte Reflexion an den Rohrenden entstehen, im eingeschwungenen Zustand ergibt sich aber wieder eine harmonische Welle. Stehwellenverhältnis und Ort des ersten Minimums bleiben erhalten, nur die absolute Amplitude der hin- und rücklaufenden Welle und damit auch der Stehwelle wird nicht dieselbe sein wie bei einfacher Reflexion am Rohrende. Da bei der Bestimmung des Reflexionsfaktors aber nur das Verhältnis von maximaler und minimaler Druckamplitude eingeht, ergibt sich für ihn auch kein Messfehler.

Was zu beobachten ist, wenn 2 Wände einander gegenüberstehen, ist das Phänomen der **Rohr-Resonanz**. Auch hier wird von einer stehenden Welle gesprochen – weil diese Bezeichnung für alle bei reinen Tönen (und damit harmonischen Wellen) auftretenden örtlichen Interferenzen üblich ist. Die Resonanz sollte aber keinesfalls mit einer einfachen Stehwelle, wie sie auch etwa im Freien vor einer Hauswand zu beobachten ist, verwechselt werden! Die Rohr-Resonanz ist zugleich das einfachste Beispiel dafür, was bei einer Raumresonanz (Raummode) passiert.

Zur Erklärung dieses Phänomens betrachten wir den allgemeinen Fall eines Rohrstückes, das eine Länge  $L$  hat und mit 2 beliebigen Reflexionsfaktoren abgeschlossen ist:



Den Koordinatenursprung legen wir an das linke Ende, wo sich später auch der Sender des Kundtschen Rohres befinden wird.

Je nach Abschluss des Rohres können sich bei bestimmten Frequenzen die harmonischen Wellen innerhalb des Rohres rein konstruktiv überlagern. Bei diesen Frequenzen spricht man von einer Resonanz oder Mode im Rohr.

Um es gleich vorweg zu nehmen:

Moden sind die charakteristischen Funktionen (Eigenfunktionen) eines Randwertproblems. Sie sind also Lösungen der quellenfreien (homogenen) Wellengleichung, welche die Randbedingungen erfüllen und bei Ausbreitung nicht über alle Maße wachsen. Sie sind den charakteristischen Werten (Eigenwerten) zugeordnet, welche Lösungen einer charakteristischen Gleichung des Problems sind.

Bei der Betrachtung im Frequenzbereich (Fourier- oder Laplace-Transformierte bzw. Operatorrechnung) entsprechen die Polstellen den Resonanzfrequenzen. Dies ist auch deswegen einleuchtend, weil die Pole der Übertragungsfunktion den Eigenwerten der charakteristischen Gleichung entsprechen. Pole erzeugen immer Frequenzgangüberhöhungen. Es ist also eine allgemeine Erscheinung bei schwingfähigen Systemen, dass die Feldamplituden besonders groß werden, wenn die Erregerfrequenz gleich einer Eigenfrequenz des Systems wird.

### 1.2.5.1 Einfache Betrachtung zur Resonanz

Beginnen wir mit grundsätzlichen Überlegungen zu den einfachsten Fällen

#### 1.2.5.1.1 Beidseitig geschlossenes Rohr

Als Randbedingungen für die Feldgrößen beim beidseitig geschlossenen Rohr muss man annehmen, dass die Schallschnelle an den Rohrenden zu Null wird. Dadurch wird der Druck dort ein Maximum annehmen:

$$\begin{aligned}v(x=0), v(x=L) &= 0 \\p(x=0), p(x=L) &= \text{Max}\end{aligned}$$

Harmonische Wellen, die diese Randbedingungen befriedigen sind alle, für die die Rohrlänge einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge entspricht:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

L ... Rohrlänge

$\lambda$  ... Wellenlänge

n ... Laufindex

Man spricht vom „Lambda-Halbe-Resonator“. Die Resonanzfrequenzen bestimmen sich zu:

$$\lambda \cdot f = c \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow$$

$$f_{res,n} = \frac{n \cdot c}{2 \cdot L} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

c ... Schallgeschwindigkeit (ca. 343 m/s)

Die unterste Frequenz, für die eine Resonanz auftritt ist für n=1:

$$f_{res,0} = \frac{c}{2 \cdot L}$$

Der Abstand zwischen 2 benachbarten Resonanzfrequenzen beträgt

$$f_{res,n} = \frac{i \cdot c}{2 \cdot L}$$

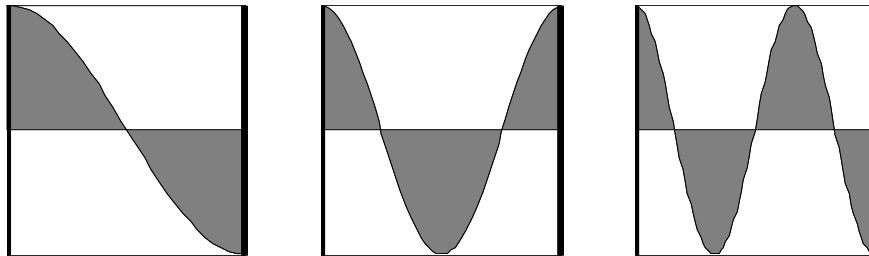
$$f_{res,i+1} = \frac{(i+1) \cdot c}{2 \cdot L}$$

$$\Delta f = f_{res,i+1} - f_{res,n} = \frac{(i+1) \cdot c}{2 \cdot L} - \frac{i \cdot c}{2 \cdot L} = \frac{(i+1) \cdot c - i \cdot c}{2 \cdot L} = \frac{i \cdot c + c - i \cdot c}{2 \cdot L}$$

⇒

$$\boxed{\Delta f = \frac{c}{2 \cdot L}}$$

Das nächste Bild zeigt die Stehwellen (Druckverteilung im Rohr) für die drei untersten Resonanzfrequenzen:



### 1.2.5.1.2 Einseitig geschlossenes, einseitig offenes Rohr

Ist etwa die linke Seite geschlossen, die rechte offen, so gilt:

$$v(x=0) = 0, v(x=L) = Max$$

$$p(x=0) = Max, p(x=L) = 0$$

Für die Lage der Resonanzfrequenzen ist jedoch unerheblich, welche Seite des Rohres geschlossen ist. Die Resonanzfrequenzen treten hier bei ungeradzahligen Vielfachen von Lambda Viertel auf, man spricht vom „Lambda-Viertel-Resonator“:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \text{mit} \quad n = 1,3,5,\dots$$

Bzw.

$$L = (2n-1) \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \text{mit} \quad n \in N$$

Die Resonanzfrequenzen ergeben sich zu

$$\boxed{f_{res,n} = \frac{(2n-1) \cdot c}{4 \cdot L} \quad \text{mit} \quad n \in N}$$

Die unterste Frequenz, für die eine Resonanz auftritt ist wieder für n=1:

$$f_{res,0} = \frac{c}{4 \cdot L}$$

Das ist nur halb so viel wie bei dem doppelseitig geschlossenen Rohr.

Der Abstand zwischen 2 Resonanzfrequenzen beträgt:

$$f_{res,n} = \frac{(2i-1) \cdot c}{4 \cdot L}$$

$$f_{res,i+1} = \frac{(2(i+1)+1) \cdot c}{4 \cdot L} = \frac{(2i+3) \cdot c}{4 \cdot L}$$

$$\Delta f = f_{res,i+1} - f_{res,n} = \frac{(2i+3) \cdot c}{4 \cdot L} - \frac{(2i-1) \cdot c}{4 \cdot L} = \frac{(2i+3) \cdot c - (2i-1) \cdot c}{4 \cdot L} =$$

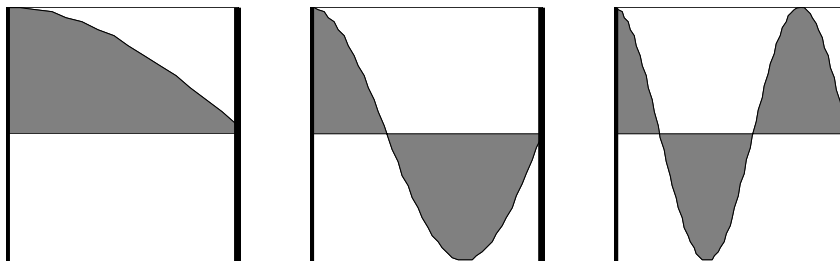
$$= \frac{2ic + 3c - 2ic - 1c}{4 \cdot L} = \frac{3c - 1c}{4 \cdot L} = \frac{2 \cdot c}{4 \cdot L}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Delta f = \frac{c}{2 \cdot L}$$

Obwohl die unterste Resonanzfrequenz gegenüber dem doppelseitig geschlossenen Rohr nach unten verschoben ist, liegen die Resonanzfrequenzen in gleichen Abständen wie dort!

Hier wieder ein Plot der Druckverteilungen im Rohr für die untersten 3 Resonanzfrequenzen:



### 1.2.5.1.3 Beidseitig offenes Rohr

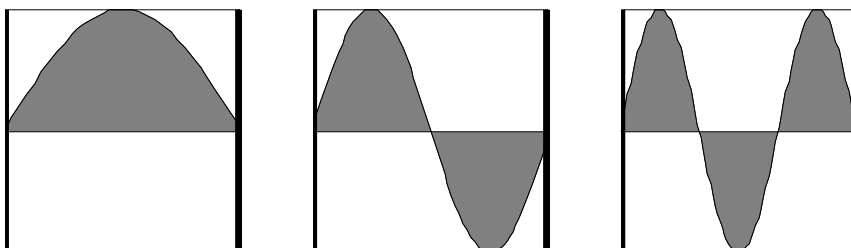
Die Randbedingungen, die hier zum tragen kommen, sind invers zu denen beim beidseitig geschlossenen Rohr:

$$v(x=0), v(x=L) = \text{Max}$$

$$p(x=0), p(x=L) = 0$$

$$f_{res,n} = \frac{n \cdot c}{2 \cdot L} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Delta f = \frac{c}{2 \cdot L}$$





Die Resonanzfrequenzen sind wieder dieselben wie beim doppelseitig geschlossenen Rohr, nur die Feldverteilung für den Druck ist anders.

Nun wollen wir die Zusammenhänge etwas genauer betrachten. Dazu stehen uns verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Da wir uns für den „eingeschwungenen Zustand“ interessieren,

### 1.2.5.2 Wellenlaufplan (Zeitbereich)

Betrachten wir ([Cremer], S.48 folgend) den zeitlichen Verlauf der Welle bei einer plötzlich eingeschalteten Quelle im ungedämpften Rohr.

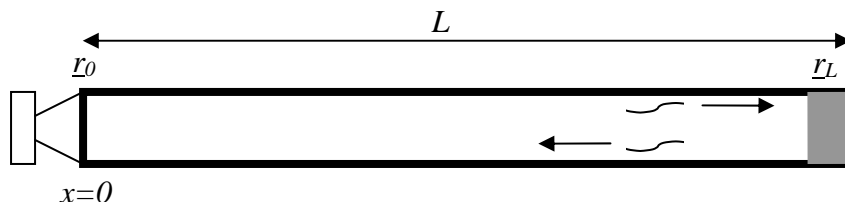


Abbildung 1 - Rohrskizze

Nehmen wir an, an der Senderseite ( $x=0$ ) herrsche Totalreflexion vor.

- (1) Setzt der Sender ein, läuft die Welle mit der Druckamplitude  $\hat{p}_0$  ans Ende des Rohres und erfährt dort eine Phasenverschiebung und Schwächung durch den Reflexionsfaktor  $\underline{r}_L$ . Durch den Weg vom Sender zum Rohrende und zurück ( $2L$ ) entsteht zusätzlich zu der möglichen Phasenverschiebung durch den Reflexionsfaktor eine Phasenverschiebung um  $2kL$  (das entspricht dem Verschiebungssatz in der Fourier-Transformation). Die Welle kehrt an den Rohranfang des Rohres zurück

$$p_r(0) = \hat{p}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot e^{-j2kL}$$

- (2) Die Welle wird daraufhin am Sender ideal reflektiert und es beginnt der zweite „Durchlauf“. Beim zweiten Durchlaufen des Rohres besteht der hinlaufende Teil des Schalldrucks aus:

$$p_h(0) = \hat{p}_0 \cdot (1 + \underline{r}_L \cdot e^{-j2kL})$$

- (3) ...

Durch ständige Wiederholung dieses Vorganges ergibt sich eine *konvergente Reihe* für die hinlaufende Welle

$$p_h = \hat{p}_0 \cdot (1 + \underline{r}_L \cdot e^{-j2kL} + \underline{r}_L^2 \cdot e^{-j4kL} + \dots)$$

Die Ableitung lässt sich auch auf den Fall erweitern, in dem auf der Senderseite auch ein Reflexionsfaktor  $\underline{r}_0$  zu berücksichtigen ist. In den bisherigen Ausdrücken ist dann  $\underline{r}_L$  durch  $\underline{r} = \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L$  zu ersetzen

Wenn die vom Anfang ( $x=0$ ) ausgehende Welle mit gleicher Phase wieder am Anfang eintrifft, d.h. wenn

$$2kL - \arg(r) = n \cdot 2\pi \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ bzw. } n \in N$$

ist, dann summieren sich alle Wellenteile in der geometrischen Reihe algebraisch und man erhält ein Maximum für die resultierende hineilende Welle:

$$(p_h)_{\max} = \hat{p}_0 \cdot (1 + r_L + r_L^2 + \dots) = \frac{\hat{p}_0}{1 - r}$$

Kommt die erste Reflexion mit entgegengesetzter Phase zurück, was bei

$$2kL - \arg(r) = (2n - 1)\pi \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ bzw. } n \in N$$

eintritt, so addiert sich nur jede zweite Welle zur primären, während alle reflektierten Wellenzüge abzuziehen sind:

$$(p_h)_{\min} = \hat{p}_0 \cdot (1 - r_L + r_L^2 - \dots) = \frac{\hat{p}_0}{1 + r}$$

Der „gleichphasige“ Abschluss jeder der im Wellenlaufplan enthaltenen Teilwellen, der zu Maximalwerten von  $p_h$  führt, ist also an bestimmte Frequenzen  $f_n$  gebunden:

$$f_n = \frac{c}{2L} \cdot \left( n + \frac{\arg(r)}{2\pi} \right) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ bzw. } n \in N$$

Das sind wieder die Eigenfrequenzen (Resonanzfrequenzen) des Rohres. Bei ihnen sind auch nach dem Abschalten des Senders Eigenschwingungen im Rohr möglich. Im Gegensatz zur statistischen Raumakustik kommen hier auch die Phasenbeziehungen zum Tragen.

### 1.2.5.3 Operatorrechnung (Frequenzbereich)

#### 1.2.5.3.1 Übertragungsfunktion am Rohrende

Man kann das Problem aber auch gleich im Frequenzbereich anschreiben und sich der Methoden der Systemtechnik bzw. Signalverarbeitung bedienen.

Mit Hilfe der Laplace-Transformierten ergibt sich etwa für  $Y(s)$  als Druck am Rohrende folgendes Bild:

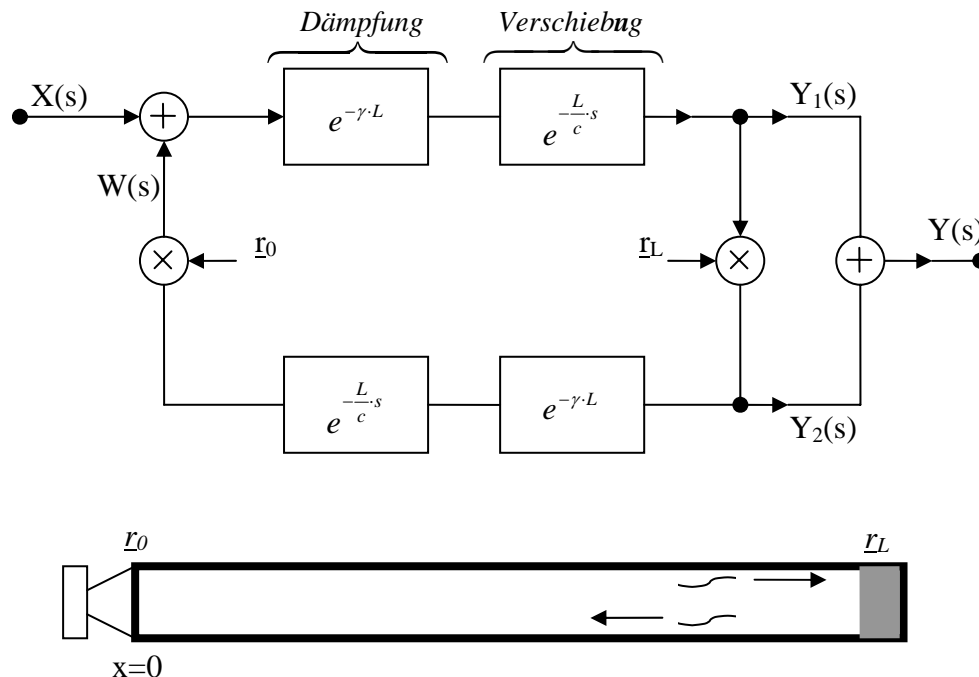


Abbildung 2 - Strukturdiagramm und Rohrskizze

Die hinlaufende Welle (oberer Zweig) wird dabei gedämpft und um die Zeitdifferenz  $L/c$  verzögert am rechten Ende des Rohres ankommen. Dort wird sie reflektiert (Multiplikation mit  $\underline{r}_L$ ) und wandert als rücklaufende Welle, die wieder gedämpft und verzögert wird, ans Quellende des Rohres zurück. Auch dort wird sie reflektiert (Multiplikation mit  $\underline{r}_0$ ) und trägt dann wieder zur hinlaufenden Welle bei (Addition) usw.

Im Strukturbild ist  $X(s)$  das „Eingangssignal“ (Speisung am Quellende, links),  $W(s)$  das mitgekoppelte Signal und  $Y(s)$  das „Ausgangssignal“ (in diesem Fall der Druck am Rohrende).  $Y_1(s)$  entspricht der hinlaufenden,  $Y_2(s)$  der rücklaufenden Welle am Rohrende. Schreiben wir nun die Gleichungen für obiges Strukturbild an:

$$Y_1(s) = [X(s) + W(s)] \cdot e^{-\gamma \cdot L} \cdot e^{\frac{L}{c} \cdot s}$$

$$W(s) = Y_1(s) \cdot \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot e^{-\gamma \cdot L} \cdot e^{\frac{L}{c} \cdot s}$$

Setzen wir  $W(s)$  in die Gleichung für  $Y_1(s)$  ein und formen um, so erhalten wir die Übertragungsfunktion  $H(s)$ :

$$Y_1(s) = \frac{e^{-\gamma \cdot L} \cdot e^{-\frac{L}{c} \cdot s}}{1 - \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot e^{-2\gamma \cdot L} \cdot e^{-2\frac{L}{c} \cdot s}} \cdot X(s)$$

mit

$$Y_2(s) = Y_1(s) \cdot \underline{r}_L$$

Erhalten wir für  $Y(s)$ :

$$Y(s) = (1 + \underline{r}_L) \cdot \frac{e^{-\gamma \cdot L} \cdot e^{-\frac{L}{c} \cdot s}}{1 - \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot e^{-2\gamma \cdot L} \cdot e^{-2\frac{L}{c} \cdot s}} \cdot X(s)$$

Daraus folgt für  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{e^{-\gamma \cdot L} \cdot e^{-\frac{L}{c} \cdot s} \cdot (1 + \underline{r}_L)}{1 - \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot e^{-2\gamma \cdot L} \cdot e^{-2\frac{L}{c} \cdot s}}$$

Bzw.

$$H(s) = \frac{(1 + r_L) \cdot d_L \cdot e^{\tau_L \cdot s}}{e^{2\tau_L \cdot s} - r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2} \quad \text{mit} \quad d_L = e^{-\gamma \cdot L}, \quad \tau_L = \frac{L}{c}$$

Der Frequenzbereich beschreibt immer eine eingeschwungene Lösung auf Anregungen mit harmonischem Signal. Ist  $H(s)$  stabil (liegen alle Pole in der linken  $s$ -Halbebene), konvergiert die Laplace-Transformierte auf der imaginären Achse und man kann den Frequenzgang (die Fourier-Transformierte) durch formale Substitution von  $s$  durch  $j\omega$  erhalten. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn beide Reflexionsfaktoren Realteile von 1 haben und das Dämpfungsmaß gleich 0 ist. Dann gibt es nämlich keinen eingeschwungenen Zustand und die Fourier-Transformierte existiert deshalb nicht.

Um diese Behauptung zu beweisen wollen wir nun die *Pole der Übertragungsfunktion* bestimmen. Die Pole sind die Nennernullstellen der Übertragungsfunktion. Nennen wir den Term  $r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2$  vorübergehend  $a$  (Substitution), setzen den Nenner Null und lösen nach  $s$  auf:

$$e^{2\tau_L \cdot s_p} - a = 0 \Rightarrow e^{2\tau_L \cdot s_p} = a \Rightarrow 2 \cdot \tau_L \cdot s_p = \ln(a) \Rightarrow s_p = \frac{\ln(a)}{2 \cdot \tau_L}$$

Der komplexe Logarithmus ist  $2\pi$ -periodisch und man erhält (nach Rücksubstitution des Ausdrucks für  $a$ ):

$$s_p = \frac{\ln(|r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2|)}{2 \cdot \tau_L} + j \cdot \frac{2k\pi + \arg(r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2)}{2 \cdot \tau_L}$$

Aus den Polstellen in  $s$  ( $s = \sigma + j\omega$ ), also den  $s_p$ , kann man die Resonanzfrequenzen und die zugehörigen Dämpfungs-/Wuchsmaße ablesen:

$$\omega_p = \frac{2k\pi + \arg(r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2)}{2 \cdot \tau_L} \quad \sigma_p = \frac{\ln(|r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2|)}{2 \cdot \tau_L}$$

Die Formel entspricht der in Kapitel 1.2.5.2 aufgestellten (d hat keinen Imaginärteil). Einige zuvor schon in Kapitel 1.2.5.1 gemachte Erkenntnisse kann man an der Formel für die Lage der Resonanzfrequenzen schön ablesen:

Man sieht wieder, dass die Resonanzfrequenzen immer im selben Abstand zueinander liegen. Der Abstand ist proportional zu  $1/\tau_L$  (also umgekehrt proportional zur Rohrlänge).

Die Phasen der Reflexionsfaktoren beeinflussen die absolute Lage der Resonanzfrequenzen über das Verhältnis  $\arg(r_0 \cdot r_L)/(2 \cdot \tau_L)$ . Erkennbar ist also auch der Einfluss eines negativen Reflexionsfaktor (entspricht einer Phase von  $\pi$ ), wenn das Rohr an einem Ende offen ist.

Wie bereits erwähnt existiert die Fourier-Transformierte (also der Frequenzgang) nur, wenn die Pole alle in der linken s-Halbebene liegen. Also nur dann, wenn die Realteile der Pole, die  $\sigma_p$ , kleiner als Null sind:

$$\sigma_p < 0 \Rightarrow \frac{\ln(|r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2|)}{2 \cdot \tau_L} < 0$$

Dies ist für  $|r_0 \cdot r_L \cdot d_L^2| < 1$  der Fall. Alle physikalisch sinnvollen Fälle ohne aktive Elemente sind natürlich stabil und besitzen einen Frequenzgang.

Nun sind wir noch an den *Nullstellen der Übertragungsfunktion* (das sind die Zählernullstellen) interessiert. Wir setzen also den Zähler der Übertragungsfunktion Null:

$$(1 + r_L) \cdot d_L = 0$$

Der Zähler kann also Null werden, wenn ...

- die Dämpfung entlang des Rohres gegen unendlich geht:  $\gamma \rightarrow \infty \Leftrightarrow d_L \rightarrow 0$
- oder  $r_L = -1$  wird, das wäre der Fall des rechts offenen Rohres  
(Am rechts offenen Rohr ist dort ein Druckknoten, also  $Y(s)=0$  und damit  $H(s)=0$ )

Mit folgendem Codefragment lässt sich der Frequenzgang in Matlab darstellen:

```
% Frequency domain representation of the acoustic impedance tube
```

```
% constants
f_min=0;
f_max=500;
r_L=1; % reflection factor (left side)
r_R=1; % reflection factor (right side)
L=1; % tubelength [m]
gamma=0.1; % damping along the tube [Np/m]
c=343; % speed of sound in air [m/s]
```

```
% lowest resonance for should be at:
```

```

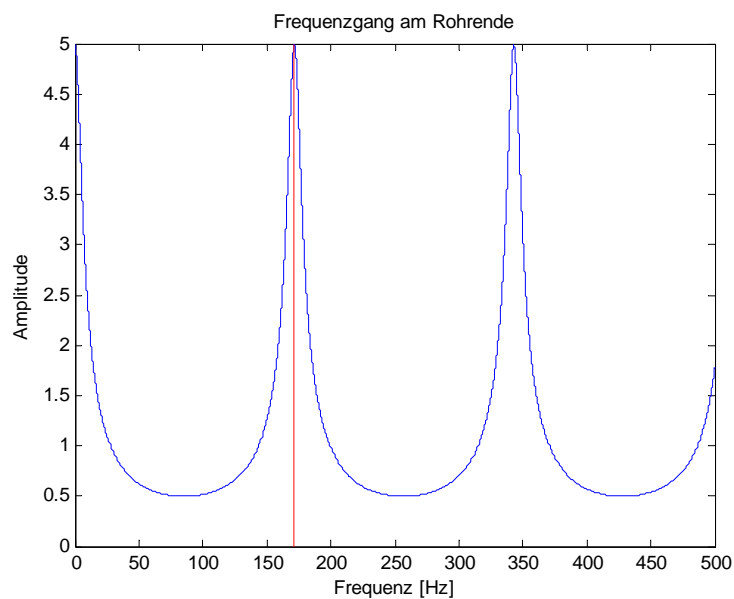
k=0;
while 1
    w_res=(2*k*pi+angle(r_L*r_R*exp(-2*gamma*L)))/(2*L/c);
    if (w_res>0), break, end
    k=k+1;
end
f_res=w_res/(2*pi);

f=f_min:0.01:f_max; % frequencies where transfer function is evaluated
w=2*pi*f;
% transfer function at the end of the tube
H=(exp(-j*L/c.*w)*exp(-gamma*L))./(1-r_L*r_R*exp(-2*j*L/c.*w)*exp(-2*gamma*L));

% plot the absolute value of the transfer function
hax=axes;
plot(hax,f,abs(H),'b')
hold(hax,'on')
line([f_res,f_res],[get(hax,'YLim'),'color','r','Parent',hax)
hold(hax,'off')
title(hax,'Frequenzgang am Rohrende')
xlabel(hax,'Frequenz [Hz]')
ylabel(hax,'Amplitude')

```

Obiger Code generiert etwa folgenden Plot:



**Abbildung 3 - Frequenzgang am Rohrende, 1m Rohr beidseitig geschlossen.**

Der vertikale Strich in Abbildung 3 markiert dabei die unterste Resonanzfrequenz.

### 1.2.5.3.2 Übertragungsfunktion an beliebigem Punkt im Rohr

Erweitern wir die Herleitung auf die Übertragungsfunktion für einen beliebigen Punkt im Rohr:

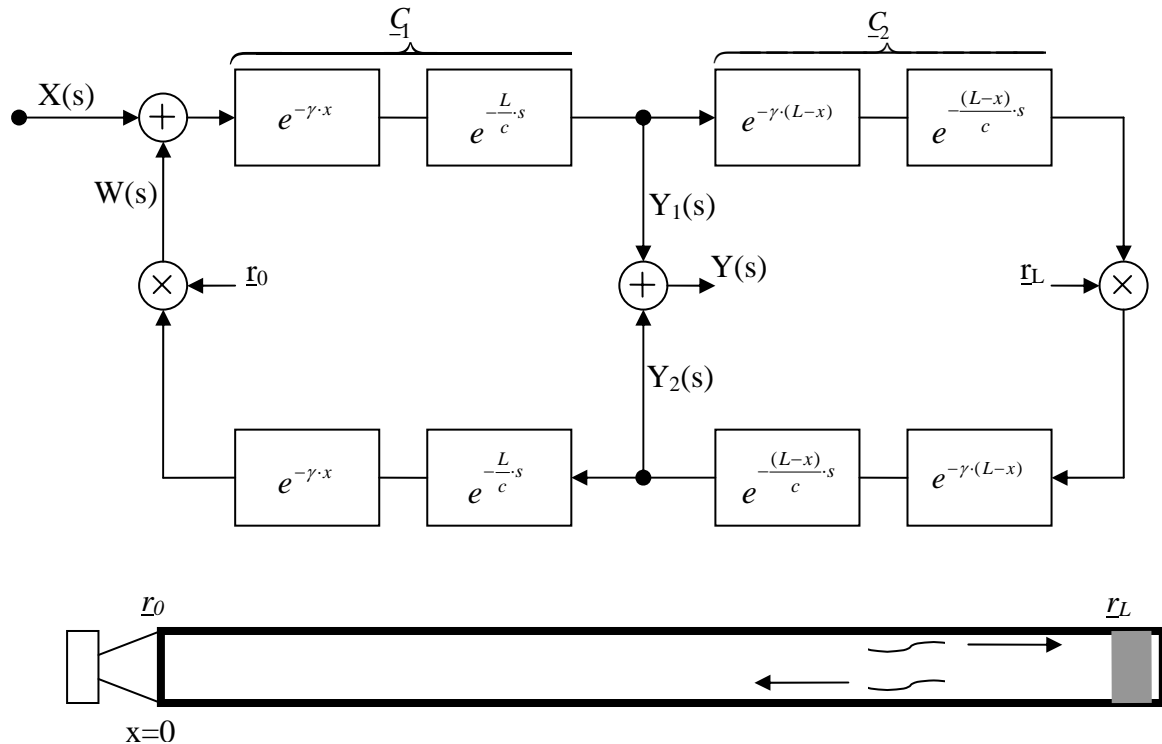


Abbildung 4 - Strukturdiagramm und Rohrskizze

Nun schreiben wir wieder die Gleichungen für obiges Netzwerk an:

- (1)  $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$
- (2)  $Y_1(s) = [X(s) + W(s)] \cdot C_1$
- (3)  $Y_2(s) = Y_1(s) \cdot C_2^2 \cdot r_L \stackrel{(2)}{=} [X(s) + W(s)] \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot r_L$
- (4)  $W(s) = Y_2(s) \cdot C_1 \cdot r_0 \stackrel{(3)}{=} [X(s) + W(s)] \cdot C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0$

Daraus wollen wir die Übertragungsfunktion(en) bestimmen:

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \quad H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X(s)} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$

Für die weiteren Ableitungsschritte wollen wir die Abhängigkeit von  $s$  nicht mehr explizit angeben und die Unterstreichungen ebenfalls weglassen, das vermindert die Schreibarbeit und verbessert die Lesbarkeit.

Um  $H_1$  zu erhalten setzen wir Gleichung (4) in Gleichung (2) ein und formen um:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= [X + W] \cdot C_1 \\
\uparrow W &= Y_2 \cdot C_1 \cdot r_0 = [X + W] \cdot C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0 \\
\Rightarrow W &= \frac{C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0}{1 - C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0} \cdot X \\
\Rightarrow Y_1 &= C_1 \cdot X + C_1 \cdot \frac{C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0}{1 - C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0} \cdot X = X \cdot \left[ \frac{C_1 - C_1^3 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0 + C_1^3 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0}{1 - C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_L \cdot r_0} \right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{\underline{C}_1}{1 - \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{C}_1^2 \cdot \underline{C}_2^2}$$

Um  $\underline{H}_2$  zu erhalten setzen wir (4) in Gleichung (3) ein und formen um:

$$\begin{aligned}
Y_2 &= [X + W] \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot r_L \\
\uparrow W &= Y_2 \cdot C_1 \cdot r_0 \\
\Rightarrow Y_2 &= [X + Y_2 \cdot C_1 \cdot r_0] \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot r_L = X \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot r_L + Y_2 \cdot C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_0 \cdot r_L \\
Y_2 - Y_2 \cdot C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_0 \cdot r_L &= X \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot r_L \\
Y_2 \cdot [1 - C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot r_0 \cdot r_L] &= X \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot r_L
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_2(s) = \frac{\underline{r}_L \cdot \underline{C}_1 \cdot \underline{C}_2^2}{1 - \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{C}_1^2 \cdot \underline{C}_2^2}$$



H setzt sich nun aus  $H_1$  und  $H_2$  zusammen:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{C_1}{1 - r_0 \cdot r_L \cdot C_1^2 \cdot C_2^2} + \frac{r_L \cdot C_1 \cdot C_2^2}{1 - r_0 \cdot r_L \cdot C_1^2 \cdot C_2^2} = \frac{C_1 + r_L \cdot C_1 \cdot C_2^2}{1 - r_0 \cdot r_L \cdot C_1^2 \cdot C_2^2}$$

Wenn wir nun wieder C1 und C2 rücksostituieren ergibt das:

$$H(s) = \frac{e^{-x\left(\frac{\gamma+s}{c}\right)} + r_L \cdot e^{-x\left(\frac{\gamma+s}{c}\right)} \cdot e^{2(L-x)\left(\frac{\gamma+s}{c}\right)}{1 - r_0 \cdot r_L \cdot e^{-2x\left(\frac{\gamma+s}{c}\right)} \cdot e^{2(L-x)\left(\frac{\gamma+s}{c}\right)}}$$

Zusätzlich zu den Polen (Resonanzstellen) der Übertragungsfunktion aus Kapitel 1.2.5.3.1 kommen hier noch Nullstellen zur Übertragungsfunktion hinzu.

Man könnte jetzt noch Übertragungsfunktion für eine beliebige Quellposition innerhalb des Rohres anschreiben – diese Mühe ersparen wir uns aber, da beim Kundtschen Rohr die Quelle üblicherweise links, bei  $x=0$ , liegt.

Hier wieder der Sourcecode zum Darstellen der Übertragungsfunktion (mit logarithmierter Amplitude).

```
% Frequency-domain representation of the acoustic impedance tube

% constants
f_min=0;
f_max=500;
r_L=1; % reflection factor (left side)
r_R=1; % reflection factor (right side)
L=1; % tubelength [m]
gamma=0.1; % damping along the tube [Np/m]
c=343; % speed of sound in air [m/s]

x=1;

% lowest resonance for should be at:
k=0;
while 1
    w_res=(2*k*pi+angle(r_L*r_R*exp(-2*gamma*L)))/(2*L/c);
    if (w_res>0), break, end
    k=k+1;
end
f_res=w_res/(2*pi);

f=f_min:0.1:f_max; % frequencies where transfer function is evaluated
w=2*pi*f;

c_1=exp(-gamma*x).*exp(-x/c*j.*w);
c_2=exp(-gamma*(L-x)).*exp(-(L-x)/c*j.*w);
H=(c_1+r_R*c_1.*c_2.^2)/(1-r_L*r_R*c_1.^2.*c_2.^2);

% plot the absolute value of the transfer function
hax=axes;
plot(hax,f,10*log10(abs(H)),'b')
line([f_res,f_res],[get(hax,'YLim')], 'color','r','Parent',hax)
title(hax,'Frequenzgang im Rohr')
```

```
xlabel(hax,'Frequenz [Hz]')
ylabel(hax,'Amplitude [dB]')
```

Für eine Rohrlänge von  $L=2.4m$  und eine „Messposition“ von  $x=2m$  generiert obiger Code etwa folgenden Plot:

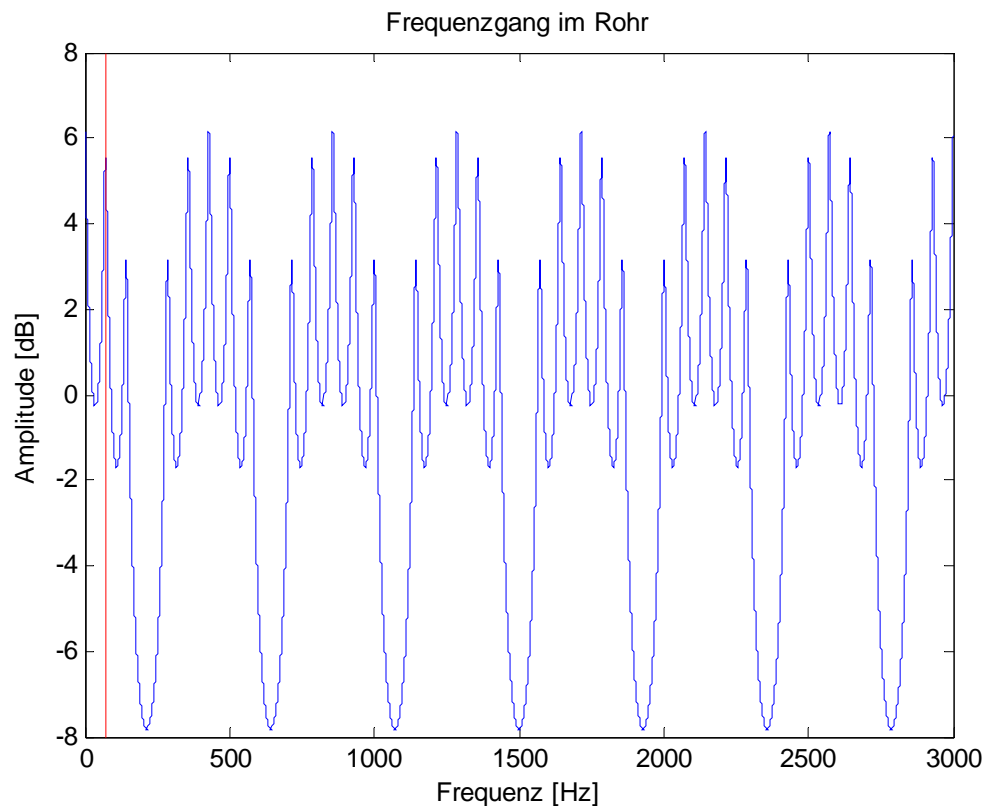
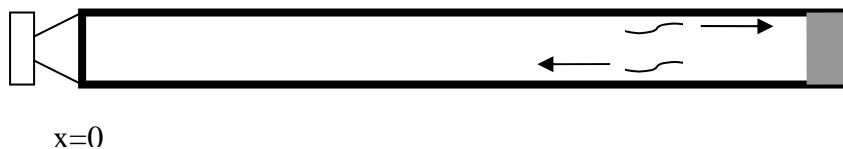


Abbildung 5 - Frequenzgang im 2.4m langen Rohr an Position  $x=2m$

Hier kann man sehr schön die zusätzlichen Nullstellen erkennen, die sich für Positionen  $x$  ergeben, die nicht am Rohrende liegen.

#### 1.2.5.4 Der dynamische Lautsprecher als Abschluss

Nun wollen wir den Fall betrachten, dass am linken Ende („Quellseite“) des Rohres ein elektrodynamischer Lautsprecher montiert ist, dessen Membran über den gesamten Querschnitt des Rohres konphas schwingt:



Laut [Cremer], S. 47 ff. kann man auf Grund des geringen Wirkungsgrades elektroakustischer Wandler am ehesten die Schnelle der Membran als eingepägt annehmen. Damit ergibt sich für die Randbedingung am Anfang des Rohres (Senderseite):

$$\underline{v}(x = 0) = \underline{v}_0$$

Die Membran sollte das Rohr dabei über den gesamten Querschnitt des konphas anregen.

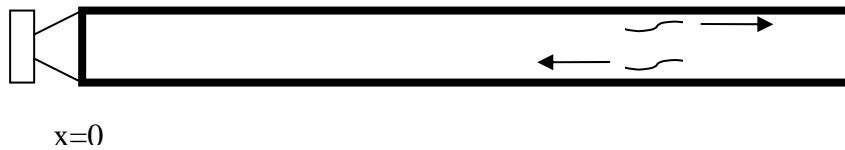
Nun lässt sich genauso argumentieren wie am geschlossenen Rohrende:

„Wenn die gegebene Schnelle bereits der primären Welle entspricht, so dürfen die zurückkehrenden Wellen mit ihrer Reflexion hier keine zusätzlichen Schnelleanteile ergeben, müssen sich also wie an starrer Wand gegenseitig auslöschen.“

In erster Näherung sollte die Welle am idealisierten Sender also wie an starrer Wand total reflektiert werden:  $r_0=1$ .

Diese Theorie findet eigentlich (nähere dazu bei der Messdatenauswertung) auch eine Bestätigung im Lautsprecherbau:

Das sogenannte „Transmissionline“ Gehäuse arbeitet nach dem Prinzip der Wellenresonanz. Ein Ende bildet dabei der Lautsprecher, das andere Ende ist offen:



Die Praxis zeigt, dass so ein Gehäuse Resonanzen aufweist, wie ein  $\lambda/4$ -Resonator, also ein Rohr, das einseitig offen, einseitig geschlossen ist. Kleinere Abweichungen treten dabei bei der untersten Resonanzfrequenz auf, die manchmal leicht nach oben verschoben ist.

## 1.3 Schallfeldimpedanzen

Das Simulationstool soll als Spezialfälle auch den Abschluss mit Kolbenmembranimpedanz und mit Kugelwellenimpedanz darstellen können. Daher wird in diesem Abschnitt ein kurzer Überblick zu diesen Themen gegeben.

### 1.3.1 Die Kugelwelle

Eine Welle, die sich in alle Raumrichtungen gleichmäßig (kugelförmig) ausbreitet, wird als Kugelwelle bezeichnet. Anders ausgedrückt ist der Schalldruck auf der Oberfläche einer Kugel in deren Mittelpunkt sich die Kugelschallquelle befindet konstant. Dies bedeutet, dass der Schalldruck nur von der Entfernung  $r$  von der Quelle und nicht von der Richtung abhängt.

#### 1.3.1.1 Schalldruck in der Kugelwelle

Die allgemeine Form der Laplace-Operators in Kugelkoordinaten lautet:

$$\Delta u = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \tan \vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad u = u(r, \vartheta, \varphi, t)$$

Mit  $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$  (keine Winkelabhängigkeit in der Kugelwelle) wird daraus vereinfacht sich der Operator zu:

$$\Delta p = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \cdot p)}{\partial r^2}$$

Eingesetzt in die allgemeine homogene Wellengleichung erhält man die Wellengleichung in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{c^2 \cdot \frac{\partial^2 (r \cdot p)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (r \cdot p)}{\partial t^2}}$$

Setzt man nun analog zur eindimensionalen Ausbreitung wieder eine harmonische Schwingung an, erhält man:

$$(r \cdot p(r, t)) = \hat{p} \cdot \operatorname{Re}\{e^{j[k(ct-x)+\varphi]}\} = \hat{p} \cdot \cos([k(ct-x) + \varphi])$$

daraus folgt:

$$p(r, t) = \frac{\hat{p} \cdot \operatorname{Re}\{e^{j[k(ct-x)+\varphi]}\}}{r} = \frac{\hat{p} \cdot \cos([k(ct-x) + \varphi])}{r}$$

Der Schalldruck verhält sich bei der Kugelwelle offensichtlich umgekehrt proportional zur Entfernung von der Quelle.

### 1.3.1.2 Schallschnelle in der Kugelwelle

Sie lässt sich analog zur ebenen Welle wieder mit der Euler'schen Bewegungsgleichung ermitteln. Sinnvollerweise wird auch sie in Kugelkoordinaten überführt.

Man erhält dann für die Schallschnelle der Kugelwelle:

$$v_r = \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\hat{p}}{r} \cdot \cos[k(ct - r) + \varphi] + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\hat{p}}{k \cdot r^2} \cdot \sin[k(ct - r) + \varphi]$$

Man sieht, dass die Schallschnelle zunächst mit  $\frac{1}{k \cdot r^2}$  abnimmt, und zum Schalldruck um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben ist. Mit zunehmender Entfernung überwiegt dann der 1. Term der Gleichung, da dieser nur mit  $\frac{1}{r}$  abnimmt. Dadurch wird die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle immer geringer. Der erste Term wird als Fern- und der zweite als Nahfeld bezeichnet.

### 1.3.1.3 Die Kugelwellenimpedanz

Die Impedanz ist das Verhältnis von Schalldruck zu Schallschnelle. Beide wurden oben bereits angeschrieben. Bildet man das Verhältnis und formt um, ergibt sich:

$$\underline{Z}_{Ku} = Z_0 \cdot \left( \frac{k^2 \cdot r^2}{1 + k^2 \cdot r^2} + j \frac{k \cdot r}{1 + k^2 \cdot r^2} \right)$$

## 1.3.2 Die kreisförmige Kolbenmembran

Als kreisförmige Kolbenmembran wird eine, in Richtung ihrer Flächennormale schwingende kreisförmige Platte, die in einer ideal starren Wand eingebaut ist, bezeichnet.

Die Schallschnelle ist also vorgegeben und überall auf der schwingenden Platte gleich ist. Da das abgestrahlte Schallfeld rotationssymmetrisch zur Flächennormale sein muss, ist der Schalldruck  $\underline{p}(r, \vartheta, t)$  nur vom Winkel  $\vartheta$  zwischen dem Ortsvektor eines Punktes und der Flächennormale, und der Entfernung  $r$  abhängig.

Um  $\underline{p}(r, \vartheta, t)$  zu ermitteln wird die schwingende Platte in infinitesimale Flächenelemente, die nach dem Huygensschen Prinzip alle eine Elementarwelle abstrahlen, aufgeteilt. Nach einigen Näherungen führt dies auf folgende Schalldruckverteilung:

$$\underline{p}(r, \vartheta, t) = \frac{2J_1(kr_M \sin \vartheta)}{kr_M \sin \vartheta} \cdot j \frac{Z_0 k}{2r} r_M^2 v_m e^{k(ct-r)} = \Gamma_{Ko} \cdot j \frac{Z_0 k}{2r} r_M^2 v_m e^{(ct-kr)}$$

- $J_1$  ..... Besselfunktion 1. Ordnung
- $r_M$  ..... Membranradius
- $\vartheta$  ..... Winkel zwischen Ortsvektor des Messpunktes und Flächennormale
- $v_m$  ..... Membranschnelle
- $\Gamma_{Ko}$  ..... Richtungsfaktor

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass sich der Schalldruck für konstantes  $\Gamma_{Ko}$  wie bei der Kugelwelle umgekehrt proportional zur Entfernung vom Erreger verhält. Der Richtungsfaktor  $\Gamma_{Ko}$  ist Frequenzabhängig ( $k = \frac{\omega}{c}$ ).

Die Abstrahlung erfolgt für tiefe Frequenzen fast halbkugelförmig und wird mit zunehmendem  $kr_M$  immer gerichteter. Anders ausgedrückt nimmt der Schalldruck für größeres  $kr_M$  mit dem Winkel  $\vartheta$  schneller ab.

Wenn der Richtungsfaktor sehr klein ist, ist der Schalldruck für alle  $\vartheta$  näherungsweise konstant, und es wird wie bereit erwähnt eine Halbkugelwelle abgestrahlt.

### Impedanz:

$$\underline{Z}_{Ko} = \frac{p_M}{v_M}$$

Die Impedanz der Kolbenmembran ist das Verhältnis von Druck und Schnelle auf der Membran. Zur Berechnung wird dazu die Membranfläche wieder in infinitesimale Elementarstrahler zerlegt.

Es muss dabei berücksichtigt werden, dass jedes Flächenelement vom Schalldruck der anderen belastet wird und daher mehr Arbeit verrichten muss, als wenn es sich um einen allein stehenden Elementarstrahler handeln würde.

Berücksichtigt man diese gegenseitige Beeinflussung erhält man folgende Funktion für die Impedanz der kreisförmigen Kolbenmembran:

$$\underline{Z}_{Ko} = \frac{p_M}{v_M} = Z_0 \left( 1 - 2 \frac{J_1(2kr_M)}{2kr_M} + j2 \frac{H_1(2kr_M)}{2kr_M} \right)$$

$$H_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cdot \cos \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$H_1(x)$  ist die so genannte Struvesche Funktion

## 2 Simulation in Matlab

Dieser Teil erklärt den prinzipiellen Aufbau und die Funktionsweise des Simulationsprogramms. Es wird dabei auch speziell auf die Simulation betreffende mathematische Zusammenhänge eingegangen.

Implementierungsdetails sind dem im Anschluss an diese Kapitel abgedruckten Quellcode zu entnehmen.

### 2.1 Allgemeines

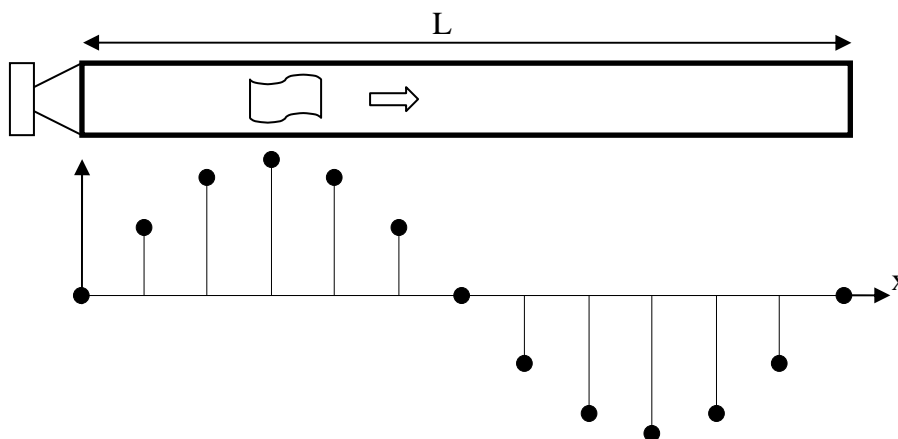
#### 2.1.1 Orts- und Zeitdiskretisierung

Basis der Simulation ist ein **Zeitschrittverfahren**:

An äquidistanten Stellen entlang des Kundtschen Rohres soll der Schalldruck berechnet werden. Diese (örtlichen) Samples müssen symmetrisch zum Mittelpunkt des Rohres liegen, denn vor- und rücklaufende Welle müssen an denselben Stellen im Rohr repräsentiert werden, weil der resultierende Schalldruck an einer Stelle durch Summation aus beiden Termen gebildet wird.

Unterteilt man das Rohr, dann hat man aber noch die Wahl: will man an den Rändern des Rohres Samples, oder nicht. Wenn nein, dann ist die Anzahl der Samples entlang des Rohres gleich der Anzahl der Lücken. Wenn ja, dann ist die Anzahl der Samples um eins höher als die Anzahl der Lücken; für diesen Fall entscheiden wir uns, denn dann ist der Schalldruck entlang der *gesamten* Rohrlänge durch die Samples repräsentiert.

Die Anzahl der Samples  $N$  wollen wir als (Orts-) Auflösung bezeichnen, sie ist also um 1 höher als die Anzahl der Lücken (der „Ortsinkremente“) zwischen den Samples ( $N-1$ ).



Wir wissen auch aus der Theorie, dass sich die Welle verzerrungsfrei in Ausbreitungsrichtung fortbewegt. Wir stellen uns nun folgende Frage:

In welchem Zeitraum bewegt sich bei einer bestimmten Frequenz  $\bar{f}$  eine harmonische, ebene Welle im Rohr der Länge  $L$  um die Strecke  $L/(N-1)$  weiter? Immer im selben! Das ist so wegen der konstanten Phasengeschwindigkeit der Welle in der Luft (das ergibt sich aus der Lösung der Wellengleichung).

Allgemein gilt  $v = \frac{s}{t}$

In unserem Fall bedeutet das:

$$c = \frac{s}{t} \text{ bzw. } c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L/(N-1)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{(N-1) \cdot c}$$

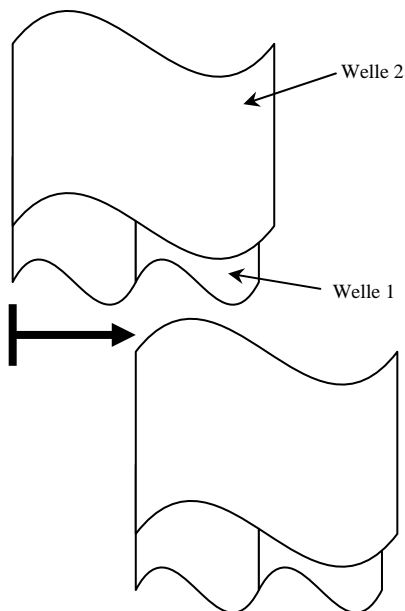
Die zugehörige *Phasenänderung* im Argument (des Cosinus bzw. Sinus oder der komplexen Exponentialfunktion) ist bei einer harmonischen Welle jedoch frequenzabhängig:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi f \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi f \cdot L}{c \cdot (N-1)}$$

Denn eine Welle höherer Frequenz und damit kürzerer Wellenlänge legt im Rohr wegen der konstanten Schallgeschwindigkeit zwar dieselbe Strecke zurück wie eine Welle größerer Wellenlänge - aber die Anzahl oder der Teil der Perioden die dabei verschoben werden, ist bei ersterer höher.

In nachfolgender Skizze hat die Welle Nummer 2 die doppelte Wellenlänge wie die Welle Nummer 1:



Um den gleichen Weg zurückzulegen muss sich die Phase von Welle 1 dabei um  $2\pi$  ändern, die Phase von Welle 2 jedoch nur um  $\pi$ !

Dieser Zusammenhang entspricht dem Verschiebungssatz in der Fourier-Transformation.



Für die vorlaufende Welle bewegt sich ein Punkt konstanter Phase mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung  $x$  vom Erzeuger weg. Da dies für jeden Punkt gilt, kann jeder Punkt des Vektors, der die Funktionswerte der vorlaufenden Welle enthält, einfach um einen Wert weiter nach rechts geschoben werden, wenn die Größe des Zeitschrittes genau so gewählt wird, dass der dabei von der Welle zurückgelegte Weg genau einem Ortsinkrement entspricht. Das entspricht der **Differenzgleichung**

$$p[n, t] = p[n-1, t-1] \quad \text{mit } 1 \leq n \leq N \quad \text{und } t \in N_0 \text{ (natürliche Zahlen inklusive 0)}$$

Mit dem „nachrückenden“ Wert  $p[0]$ :

$$p[0, t-1] = \hat{p} \cdot e^{j(t \cdot \Delta\varphi + \frac{3}{2}\pi)} \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi f \cdot L}{c \cdot (N-1)} \quad \text{(siehe oben)}$$

Das Addieren von  $3\pi/2$  führt dazu, dass der Realteil des Signals dann bei 0 beginnt.

Das bedeutet, man wird eine Variable  $\varphi$  einführen und sie bei jedem Zeitschritt um ein Inkrement  $\Delta\varphi$  erhöhen. Damit kann man den „nachrückenden“ Wert der Welle berechnen. In der Simulation ist dies die Variable `SIMULATION_STATE.phase` und innerhalb der Berechnungsroutine wird in Abhängigkeit von der Frequenz (`SIMULATION_STATE.frequency`) und der Auflösung (`SIMULATION_STATE.resolution`) das Phaseninkrement berechnet und zur aktuellen Phase (modulo  $2\pi$ ) addiert.

Auch die rücklaufende Welle und die transmittierte Welle wird durch Schieben der Werte im Sinne einer Differenzgleichung realisiert.

Da in der Simulation immer nur eine harmonische Welle einer bestimmten Wellenlänge dargestellt werden soll, scheint es sinnvoll, die Auflösung  $N$  so zu wählen, dass eine Periode gerade gut genug dargestellt wird. In der Simulation wird daher die Auflösung an die Frequenz angepasst. Das hat auch den Vorteil, dass das Abtasttheorem nicht verletzt wird.

## 2.1.2 Frequenzänderung

Wie oben angedeutet wird in der Simulation wird daher die Auflösung an die Frequenz angepasst. Dadurch wird Aliasing vermieden und ein schnellerer Ablauf der Simulation bei tiefen Frequenzen gewährleistet.

Die ursprüngliche Simulation verwendete dazu eine recht komplizierte Methode mit Skalierungsfaktoren. Die jetzige Programmversion berechnet einfach immer das zur Momentanfrequenz gehörige korrekte Phaseninkrement.

Allerdings muss bei einer Änderung der Auflösung die Welle interpoliert werden, da dann entweder mehr oder weniger Werte zur Verfügung stehen, die das analoge Signal annähern. Diese Interpolation wird bei jeder Frequenzänderung durchgeführt und führt natürlich zu Signalverfälschungen, die besonders dann gravierend sind, wenn man die Frequenz verringert (Aliasing).

Die Auflösung  $N$  selbst wird folgendermaßen bestimmt:

- Die Welle der maximal darstellbaren Frequenz soll pro Wellenlänge mit 8 Samples dargestellt werden

- Die Auflösung wird proportional zur Wurzel aus dem Quotienten von aktueller Frequenz zu maximaler Frequenz skaliert

Im Programm ist dazu eine Konstante namens *CONSTANTS.resolution\_scale\_constant* definiert. Die Auflösung *SIMULATION\_STATE.resolution* wird durch Multiplikation der Wurzel der Momentanfrequenz mit besagter *CONSTANTS.resolution\_scale\_constant* und anschließender Rundung gewonnen (die Auflösung muss ja ganzzahlig sein).

### 2.1.3 Dämpfung

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, ist die Dämpfung im Rohr unter der Annahme homogener Rohrwände exponentiell - die Einhüllenden der hin- bzw. rücklaufenden Wellen sind:

$$p_h(x) = e^{-\gamma x}$$

$$p_r(x) = e^{\gamma x}$$

$\gamma$  ..... Dämpfungsbelag [1/m]

Um diesen Zusammenhang im diskreten umzusetzen, wird jeder Wert pro Verschiebung (also pro Zeitschritt) mit einer Konstante  $0 \leq \kappa \leq 1$  multipliziert. Diese Konstante  $\kappa$  wird aus einer in Neper pro Meter vorgegebenen Dämpfungskonstante unter Berücksichtigung der Auflösung berechnet:

$$\kappa = e^{-\gamma \frac{L}{N-1}}$$

$L$  ... Rohrlänge

$N$  ... Auflösung (entspricht im Programm *SIMULATION\_STATE.resolution-1*)

Als Differenzgleichung für die hinlaufende Welle angeschrieben, ergibt dies

$$p_h[n,t] = p_h[n-1,t-1] \cdot \kappa \quad \text{für } 1 \leq n \leq N$$

$\kappa$  ..... Dämpfungskonstante

Dadurch wird ein Wert bei jedem Zeitschritt mit der Dämpfungskonstante  $\kappa$  multipliziert und ist nach dem Durchlaufen der Gesamtlänge  $L$ ,  $(N-1)$ - mal mit  $\kappa$ , das heißt mit  $\kappa^{(N-1)}$  multipliziert worden. So wird der exponentielle Zusammenhang implizit umgesetzt.

### 2.1.4 Reflexion

Wie bereits besprochen wird das Fortschreiten einer Welle durch Verschieben der Werte um diskrete Schritte implementiert. Den am linken Ende des Rohres („Quellseite“) zum Tragen kommenden Reflexionsfaktor wollen wir wieder  $r_0$  (weil im gewählten Koordinatensystem dort  $x=0$  ist) nennen, den am rechten Ende  $r_L$  ( $x=L$ ). Im Programm selbst ist  $r_0$  durch die Variable *SIMULATION\_STATE.r\_0\_source* und  $r_L$  durch die Variable *SIMULATION\_STATE.r\_0\_end* repräsentiert.

### Die hinlaufende Welle:

Der erste Wert der hinlaufenden Welle setzt sich aus der mit der Amplitude  $\hat{p}_h$  skaliertem neuen Wert zusammen und dem von der rücklaufenden Welle wieder „nach rechts“ reflektierten

$$p_h[1,t] = \hat{p}_h \cdot e^{j(t \cdot \Delta\varphi + \frac{3}{2}\pi)} + p_r[1,t] \cdot r_0 \cdot \kappa$$

Alle anderen Werte ergeben sich durch Verschiebung. Als Differenzengleichung angeschrieben:

$$p_h[n,t] = p_h[n-1,t-1] \cdot \kappa \quad \text{für } 2 \leq n \leq N$$

Der „letzte“ Wert der vorlaufenden Welle wird dann gemäß der Reflexionsfaktors  $r_L$  am Rohrende (Abschluss) in eine reflektierte und eine transmittierte Welle aufgeteilt:

### Die reflektierte Welle

Der letzte Wert der reflektierten Welle (ganz rechts) ist:

$$p_r[N,t] = p_h[N,t] \cdot r_L$$

$N$  .....Länge der Folge, entspricht der Auflösung

alle anderen Werte ergeben sich analog zur vorlaufenden Welle durch Verschiebung:

$$p_r[n,t] = p_r[n+1,t-1] \cdot \kappa \quad \text{für } 1 \leq n \leq N-1$$

### Die transmittierte Welle

Für die transmittierte Welle gilt:

$$p_t[1,t] = p_h[N,t] \cdot (1 + r_L)$$

und

$$p_t[n,t] = p_t[n-1,t-1] \quad \text{für } 2 \leq n \leq N$$

Es wird hier also noch keine  $r$ -Abhängigkeit der Amplitude berücksichtigt!

### Die gesamte Welle

Der Schalldruck ist entsprechend dem d'Alembertschen Ansatz die Summe aus vor- und rücklaufender Welle:

$$p[n,t] = p_h[N,t] + p_r[N,t]$$

Im Programm wird der Realteil dieser Funktion wird als zeitabhängiger Druck über der Rohrlänge dargestellt und der Betrag als Repräsentant für die Amplitude über der Rohrlänge.

## 2.2 Der Simulationsablauf

Das Grundprinzip der Simulation wurde ja bereits im letzten Abschnitt erklärt.

Das zentrale Element bei der programmtechnischen Umsetzung ist die globale Datenstruktur *SIMULATION\_STATE*, in der sämtliche die Simulation betreffende Daten gespeichert sind. Sie wird zum einen von allen Benutzereingaben und zum anderen von der Funktion *advance\_simulation*, welche die Simulation um einen diskreten Zeitschritt fortschreiten lässt, geändert.

**Ihre Hauptelemente sind:**

- die vom Benutzer einstellbaren Parameter,
- die Vektoren *forward\_func*, *backward\_func*, und *transmitted\_func*, die die entsprechenden Wellen repräsentieren,
- die dem Zeitfortschritt entsprechende Phase *phase*,

Der prinzipielle Ablauf der Simulation lässt sich in folgende Abschnitte gliedern, die in einer Schleife ausgeführt werden:

- Berechnen eines neuen Status
- Aktualisieren der Diagramme
- Warten

Um die Simulation um ein Zeitintervall fortschreiten zu lassen müssen die im *SIMULATION\_STATE* gespeicherten Funktionen und die dem Zeitpunkt entsprechende Phase *phase*, der ebenfalls in der erwähnten Struktur gespeichert ist, aktualisiert werden.

## 2.3 Anpassung an Benutzereingaben

Bei einer Aktion des Benutzers (ändern eines Parameters, drücken eines Knopfes etc.) wird von MATLAB die entsprechende *callback* Funktion aufgerufen, welche so geartet sein muss, dass sie auf die Benutzereingabe sinnvoll reagiert.

Allgemein wird die betreffende Variable im *SIMULATION\_STATE* auf den Wert der erfolgten Eingabe gesetzt. In der Folge werden nur darüber hinaus gehende Anpassungen beschrieben.

### 2.3.1 Änderung der Frequenz- Auflösungsanpassung

Vorausgesetzt der Wert der Variablen *sound* des *SIMULATION\_STATE* beträgt 1, wird das Signal eine Sekunde lang über die Soundkarte abgespielt.

Außerdem wird um einerseits Aliasing zu vermeiden und andererseits einen schnelleren Ablauf der Simulation bei tiefen Frequenzen zu ermöglichen die Auflösung an die Frequenz angepasst.

Um bei tiefen Frequenzen eine höhere Anzahl von Werten pro Periode zu gewährleisten, ist die Auflösung immer proportional zur Wurzel der Frequenz.

$$\text{Auflösung} = \sqrt{\text{Frequenz}} \cdot \text{const.}$$

Die Proportionalitätskonstante ist so gewählt, dass die minimale Anzahl der Werte pro Periode  $N_{\min}$  acht beträgt und errechnet sich folgendermaßen:

$$\text{const.} = \frac{Z \cdot N_{\min}}{\sqrt{f_{\max}}}$$

$f_{\max}$  .....Maximalfrequenz

$f_1$  .....Die Wellenlänge von  $f_1$  ist gleich der Rohrlänge  $f_1 = \frac{c}{l}$

$Z$  .....Maximale Anzahl von Perioden  $Z = \frac{f_{\max}}{f_1}$

### Funktionsinterpolation:

Soll das gleiche Signal mit einer anderen Auflösung dargestellt werden, muss das ursprüngliche Signal interpoliert werden. Ist die neue Auflösung geringer als die alte, ist dies natürlich mit einem Informationsverlust verbunden und es kommt zu Signalverzerrungen.

## 2.4 Darstellung

### 2.4.1 Longitudinalwellendarstellung:

Die Darstellung der Longitudinalwellenausbreitung erfolgt durch Äquipotentialflächen, die aufgrund der zweidimensionalen Darstellung als Kurven abgebildet werden.

Bei geringer Auflösung wird jedem Punkt eine solche Kurve zugeordnet. Um eine zu hohe Liniendichte bei der Longitudinaldarstellung zu vermeiden, werden bei höheren Auflösungen nicht mehr alle Punkte als Kurve dargestellt, sondern nur noch jede 2., 3.....

Im Rohr handelt es sich weil sich hier eine *ebene Welle* ausbreitet um Ebenen, die als Geraden abgebildet werden.

Bei der *Kugelwelle* sind es Kugelflächen deren Querschnitte Kreise sind.

Da die Form der Äquipotentialflächen bei der *Kolbenmembranabstrahlung* von der Besselfunktion erster Ordnung abhängt, haben sie keine so einfache geometrische Form.

Da sie jedoch rotationssymmetrisch sind, können auch sie ohne Informationsverlust als Kurven dargestellt werden

### 2.4.2 Darstellung der ebenen Welle

Im unangeregten Zustand sind die Ebenen äquidistant.

Über den Zusammenhang, dass die Strecke das Integral der Geschwindigkeit ist, lässt sich für jede Ebene eine relative Auslenkung zur Ruhelage berechnen.

Dazu wird die Schallschnelle über die gesamte Länge integriert. Es geht dabei nicht um das Endergebnis dieses Integrals, sondern um die Momentanwerte.

In der Praxis wird ein Signal generiert, das in jedem Punkt die Summe aller Werte des zu integrierenden Signals bis zu dem betreffenden Punkt als Wert hat.

Wenn das Integral von 0 bis N gehen soll, und auf Normierung verzichtet wird erhält man folgende Differenzgleichung:

für  $n = 0$

$$y[0] = x[n]$$

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad \text{für } 1 \leq n \leq N-1$$

$y$  .....integriertes Signal  
 $x$  .....zu integrierendes Signal

Der so erhaltene Vektor beinhaltet nun für jeden Punkt des Signals eine Abweichung von der Ruhelage.

Wird die Abweichung nun zur Ruheposition addiert, erhält man die Position der Fläche, die sich aufgrund der Schallschnelle ergibt.

### 2.4.3 Darstellung der Kugelwelle

Der prinzipielle Unterschied zur Ebenen Welle besteht darin, dass die translatorische Bewegung nicht nur in eine Richtung, sondern in alle Richtungen gleichermaßen stattfindet. Es ändert sich also der Radius der Kugelflächen.

Außerdem muss die Schallschnelle gemäß der im Abschnitt 3 angeführten Formel berechnet werden.

### 2.4.4 Darstellung der Kolbenmembranabstrahlung

Der Sachverhalt stellt sich hier etwas komplizierter dar, da nicht von vornherein klar ist welche Formen die Äquipotentialflächen haben.

Um diese zu ermitteln kann die Formel für den Schalldruck bei Erregung mit einer kreisförmigen Kolbenmembran nach  $r$  umgeformt, und dann  $r$  in Abhängigkeit von  $\vartheta$  bei konstantem Druck  $p$  berechnet werden.

Zur Erinnerung:

$$\underline{p}(r, \vartheta, t) = \frac{2J_1(kr_M \sin \vartheta)}{kr_M \sin \vartheta} \cdot j \frac{Z_0 k}{2r} r_M^2 v_m e^{k(ct-r)} = \Gamma_{K_0} \cdot j \frac{Z_0 k}{2r} r_M^2 v_m e^{(ot-kr)}$$

daraus folgt:

$$\underline{r}(p, \vartheta, t) = -\frac{2J_1(kr_M \sin \vartheta)}{kr_M \sin \vartheta} \cdot j \frac{Z_0 k}{2p} r_M^2 v_m e^{k(ct-r)} = -\Gamma_{K_0} \cdot j \frac{Z_0 k}{2p} r_M^2 v_m e^{(ot-kr)}$$

Mit dieser Formel kann für verschiedene  $\mathcal{G}$  und konstantes  $p$  eine Fläche, auf der konstanter Druck herrscht, bestimmt werden.

Als erste Näherung wäre es nun möglich weitere Flächen durch Multiplikation dieses Vektors mit einer Konstante zu erhalten.

Da es aber im Vergleich zur graphischen Auswertung vernachlässigbar viel Zeit kostet, die Rechnung für verschiedene Radien durchzuführen und dies ohnehin nur nach einer Frequenzänderung gemacht werden muss, liegt es nahe dies zu tun und so eine Matrix zu konstruieren, die in einer Dimension die Abhängigkeit des Radius von  $\mathcal{G}$  und in der anderen die Abhängigkeit von  $p$  beschreibt.

Die Auflösung der  $p$  Dimension hängt davon ab wie viele Äquipotentialflächen dargestellt werden sollen und kann relativ gering sein.

### **Multiplikative Auslenkung:**

Wegen der speziellen Form des Schallfeldes bietet es sich für die dynamische Darstellung an die Radien abhängig vom Schallschnelleintegral multiplikativ (anstatt additiv) zu vergrößern.

Der Zusammenhang sieht dann prinzipiell so aus

$$r_{\text{ausgelenkt}} = r \cdot (1 + \varepsilon)$$

$\varepsilon$  .....Normierte Auslenkung

Da eine übermäßige Vergrößerung von  $\varepsilon$  das Bild schnell vollkommen unbrauchbar machen würde, wird  $\varepsilon$  mit dem Maximalwert des Schnelleintegrals normiert.

Um unerwünschte Bewegungen aufgrund der Änderung dieses Normierungsfaktors zu unterdrücken werden schnelle Änderungen durch einen Tiefpass unterdrückt.

Die Auslenkung hat somit keine Aussagekraft über die tatsächliche Signalamplitude.

Diese kann aber problemlos der Darstellung der rücklaufenden Welle entnommen werden, da die Summe dieser Amplitude und der der Abstrahlung eins sein muss.

# 3 Programmbeschreibung

## 3.1 Das Hauptfenster

Nach dem Aufruf der Funktion „kundtsim“ im MATLAB Command Window erscheint, vorausgesetzt die Dateien „kundtsim.m“ und „kundtsim.fig“ befinden sich im MATLAB Arbeitsverzeichnis das Hauptfenster der Applikation.

Das ursprüngliche GUI-Layout (GUI = Graphical User Interface) wurde aufgegeben:

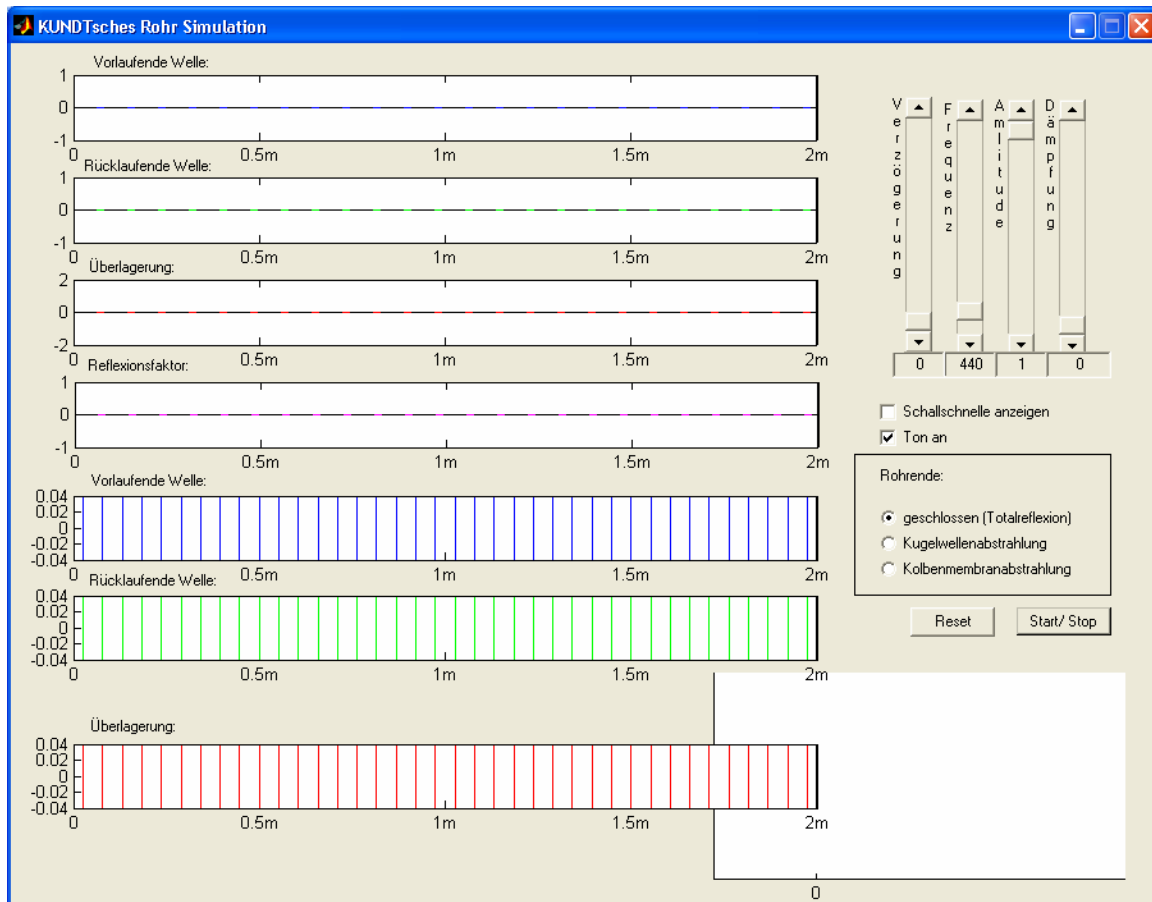


Abbildung 6 – ursprüngliches GUI-Layout



Anstatt dessen wurde ein übersichtlicheres Layout mit verringerter Anzahl an Axen erstellt. Die Grundansicht sieht folgendermassen aus:

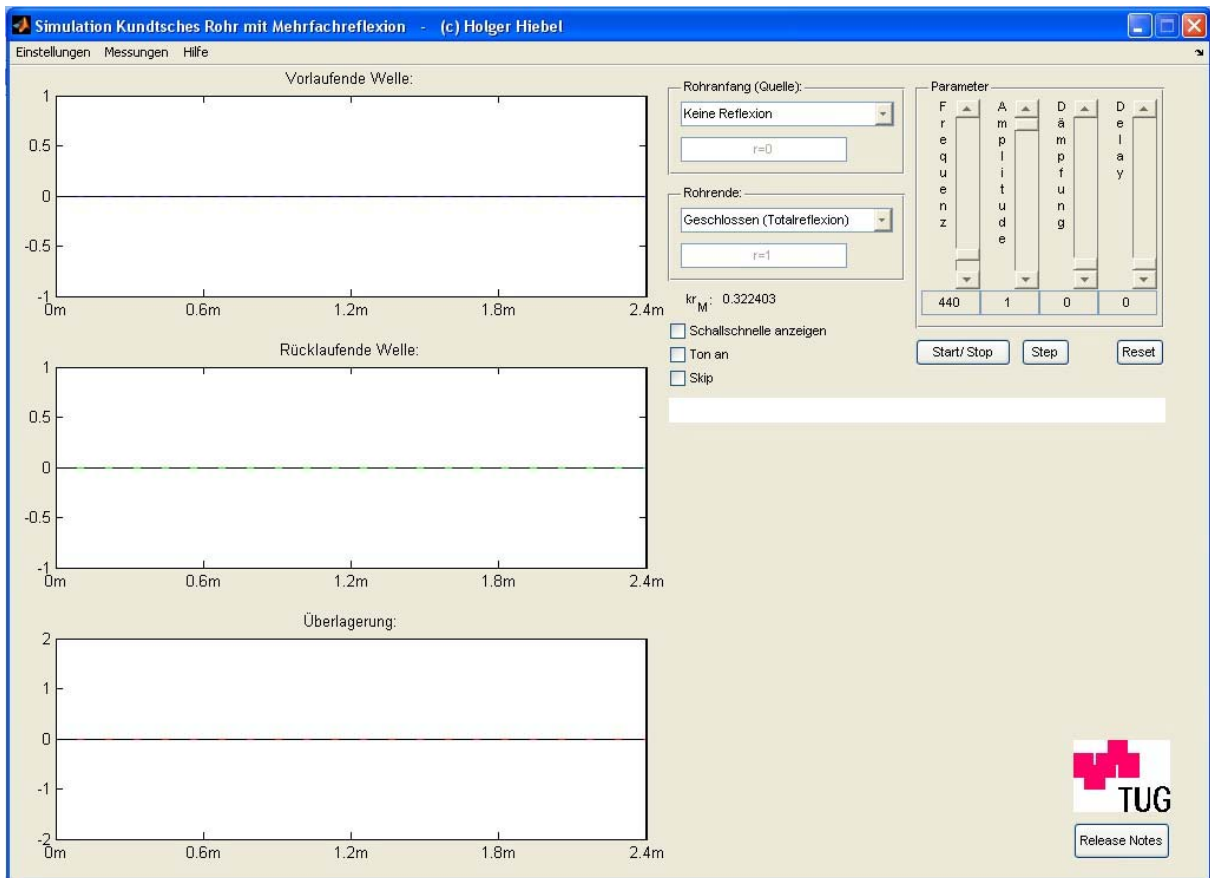


Abbildung 7 – Grundansicht kundtmeas

Im Menü kann man zwischen verschiedenen Ansichten auswählen:

- Transversale Ansicht
- Transversale Ansicht mit Reflexionsfaktor
- Longitudinale Ansicht



Abbildung 8 - Auswahlmöglichkeit Ansicht

Durch Anwahl einer der Ansichtsoptionen ändert sich das Layout der GUI und bestimmte Elemente werden aus- bzw. eingeblendet:

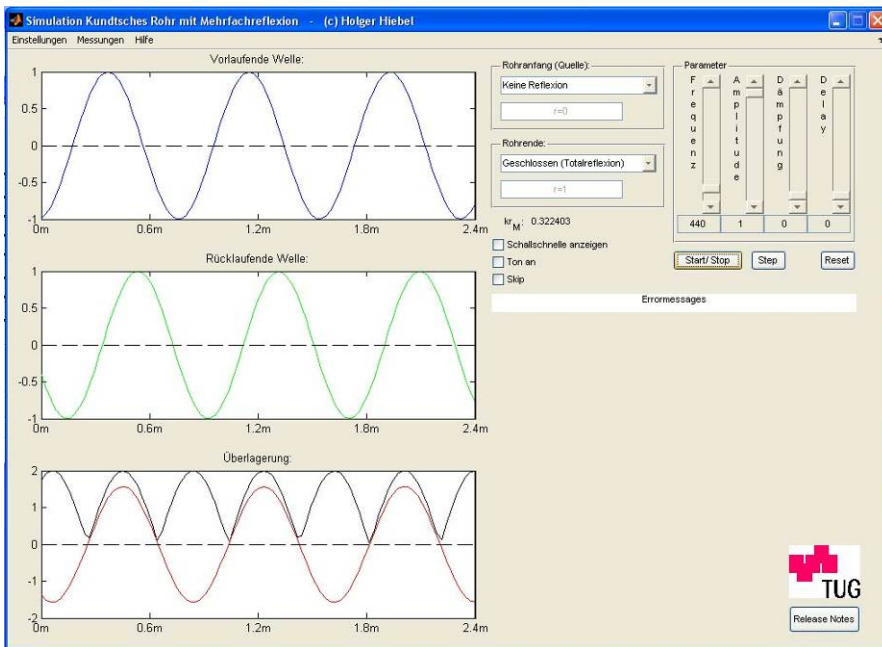


Abbildung 10 - Transversale Ansicht

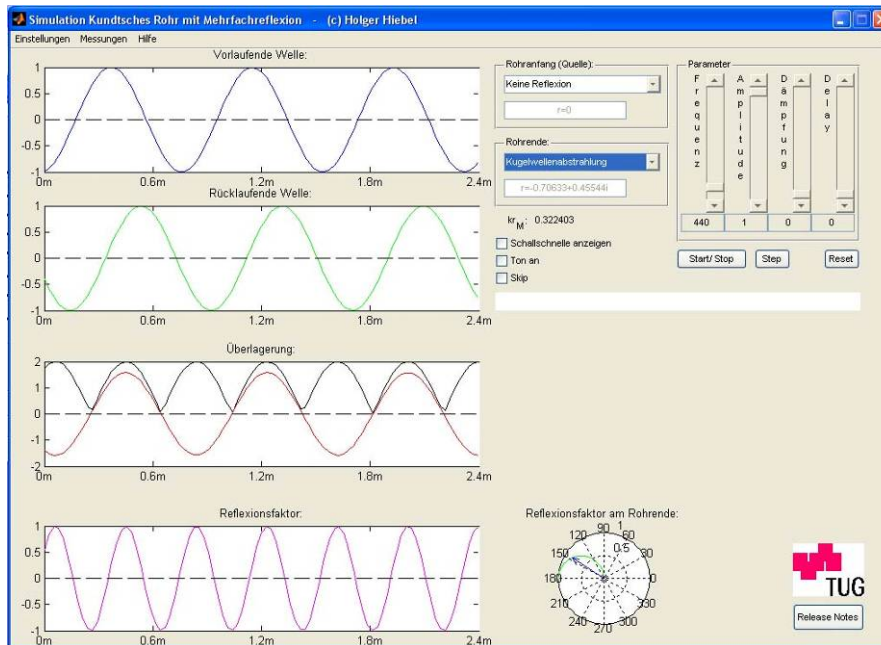


Abbildung 9 - Transversale Ansicht mit Reflexionsfaktor

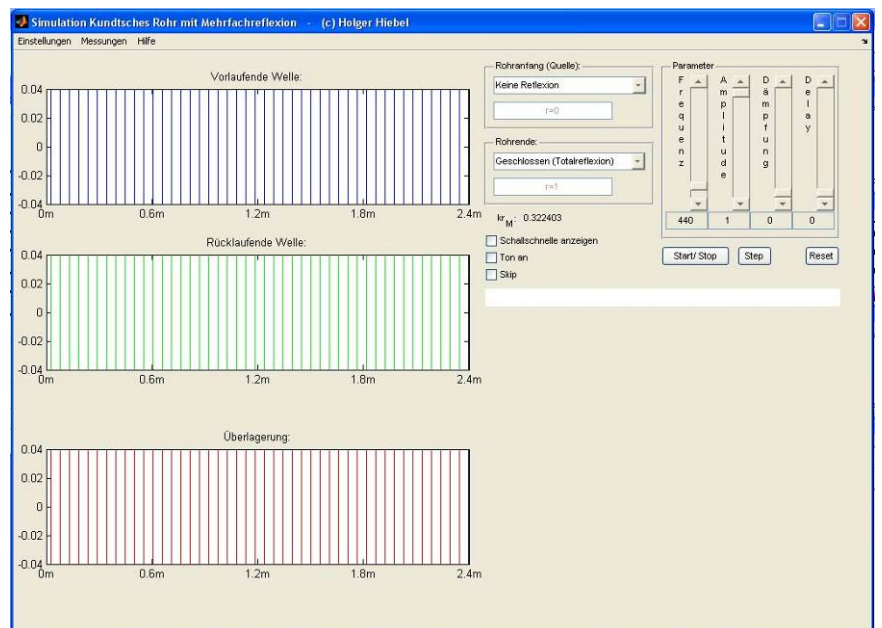
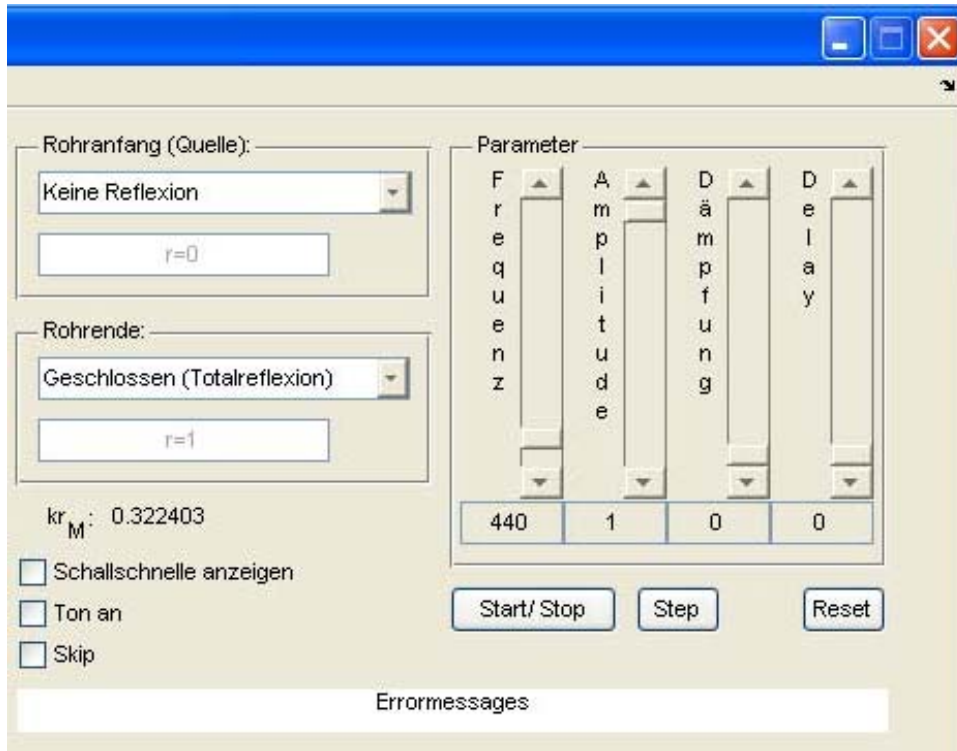
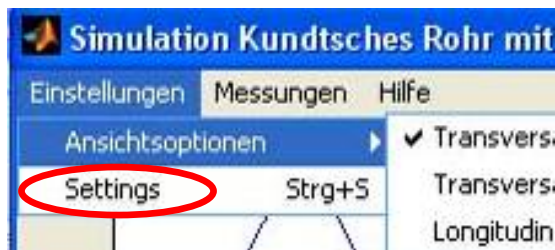


Abbildung 11 - Longitudinale Ansicht

## 3.2 Einstellmöglichkeiten



Alle direkt zugänglichen Einstellmöglichkeiten sind im rechten oberen Quadranten des Hauptfensters (des GUI) untergebracht.



Weiters gibt es noch die Möglichkeit, im Menü einen Dialog für weitere Einstellungen zu öffnen (Menü: Einstellungen, Menüpunkt: Settings).

### 3.2.1 Buttons



#### Start/ Stop

Wie unschwer zu erraten ist, wird die gestoppte Simulation durch Drücken dieses Knopfes gestartet beziehungsweise die laufende Simulation gestoppt.

#### Step

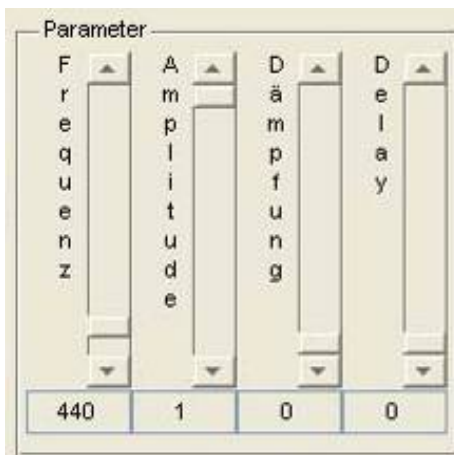
Führt einen diskreten Simulationsschritt aus

## Reset

Das Betätigen des Reset-Buttons setzt die Simulation auf den Zeitpunkt  $t = 0$  zurück. Das heißt es herrscht im gesamten simulierten Gebiet wieder ein konstanter Druck von 0. Die einstellbaren Parameter werden durch „Reset“ nicht verändert.

## 3.2.2 Parameter-Schieberegler und Eingabefelder

Sämtliche Parameter sind durch die sich im rechten Abschnitt des Fensters befindenden Schieberegler, Editierfelder und Knöpfe bei gestoppter sowie laufender Simulation einstell- und veränderbar.



Die sich unter den Schieberegler („Slider“) befindenden Eingabefelder („Edits“), zeigen immer den aktuellen Wert des entsprechenden Parameters an. Um welche einstellbare Größe es sich hierbei handelt ist der Beschriftung des Schiebereglers zu entnehmen. Darüber hinaus sind die gewünschten Werte auch direkt durch die Eingabefelder festlegbar.

Die Werte sind limitiert auf den maximalen Einstellbereich der Slider. Wird ein zu hoher oder zu niedriger Wert in einem Feld darunter eingegeben, erscheint eine Warnung im Textfeld für Fehlermeldungen und der Wert im Feld wird auf den entsprechenden Extremwert limitiert.

### Frequenz

Dieser Parameter bestimmt die Frequenz des anregenden Sinussignals. Es ist zu beachten, dass die Auflösung dynamisch an die Frequenz angepasst wird. Daher führt es zu Signalverzerrungen die Frequenz stark zu verringern, da dies auch eine Verringerung der Auflösung zur Folge hat.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist, dass eine Frequenzänderung eine *sofortige* Änderung der frequenzabhängigen Reflexionsfaktoren (bei Kugelwellenabstrahlung oder Kolbenmembran) nach sich zieht. Dieses Verhalten entspricht *nicht* der physikalischen Realität. Wird das Rohrende als Kolbenmembran simuliert, dauert es nach einer Frequenzänderung aufgrund adaptiver Skalierung eine Weile, bis sich ein sinnvolles Bild einpendelt.

### Amplitude

Sie gibt die maximale einseitige Auslenkung des anregenden Signals an. Ihr Maximum ist auf 1 normiert.

### Dämpfung

Der Dämpfungsparameter gibt den Dämpfungsbelag (Realteil der Ausbreitungskonstante), der bedingt durch Reibungsverluste entlang des Rohres entsteht, in Neper pro Meter [N/m] an.

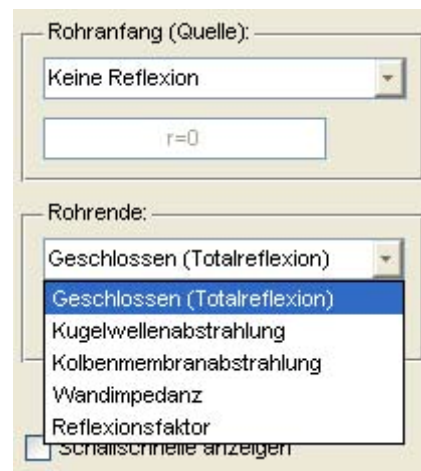
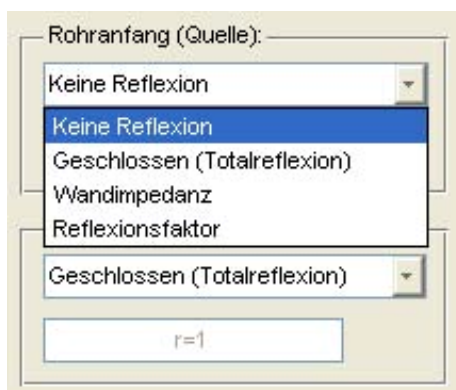
## Verzögerung

Sie gibt die Wartezeit in Sekunden [s] nach jedem Zeitschritt an. Anders ausgedrückt wird die Simulationsgeschwindigkeit durch Vergrößern dieses Wertes verringert.

### 3.2.3 Auswahl der Rohr-Abschlüsse



Für die Auswahl verschiedener Abschlüsse am Rohranfang und am Rohrende stehen 2 Pull-down-Menüs mit zugehörigen Edit-Feldern zur Verfügung. Die Edit-Felder sind nur dann aktiv, wenn dies sinnvoll ist: bei Auswahl von Wandimpedanz oder Reflexionsfaktor. Sind die Edit-Felder inaktiv, wird der aktuelle Reflexionsfaktor für das entsprechende Rohrende unveränderlich eingeblendet.



Für Reflexionsfaktor und Wandimpedanz sind auch komplexe Eingaben möglich. Diese müssen im Matlab-Format eingegeben werden (z.B.:  $3+4*j$ ).

### 3.2.4 Checkbox-Optionen





### Schallschnelle anzeigen

Ist dieser Checkbox aktiviert wird die reflektierte Welle um  $180^\circ$  phasenverschoben. Damit entspricht die Überlagerung der Wellen der Schnelle und nicht dem Druck.

### Ton an

Bei aktivierter Checkbox, ist nach jeder Frequenzänderung ein Ton der Frequenz zu hören, die gerade eingestellt wurde.

### Skip

Ist diese Checkbox aktiviert, so wird der Einschwingvorgang bei jeder Parameteränderung übersprungen und erst danach werden wieder die Wellenformen dargestellt.

Die Berechnung der eingeschwingenen Lösung basiert auf einer „quick-and-dirty“-Lösung:

Es wird die ungestörte Wellenausbreitung entlang einem Vielfachen der Rohrlänge berechnet, dann der Einfluss der Reflexionsfaktoren hinzugenommen (je nach Abschnitt in der entsprechenden Potenz aufmultipliziert) und schließlich die ganzen Teilwellen summiert. Diese Methode ist praktisch die direkte Umsetzung eines Wellenlaufplans.

## 3.3 Settings Dialog

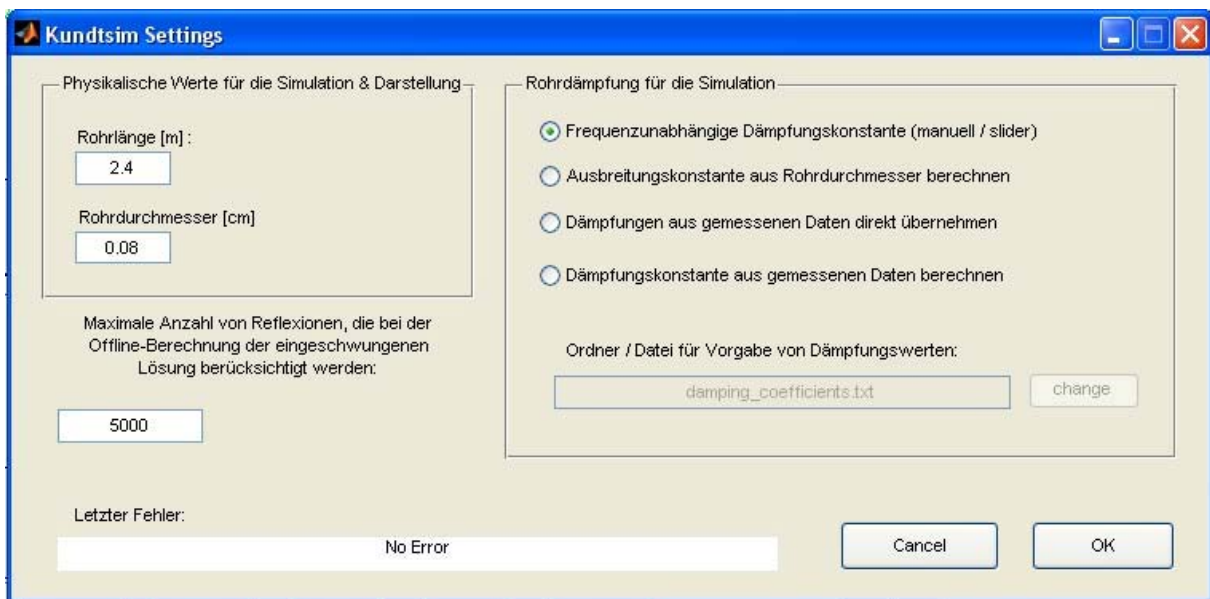


Abbildung 12 - Der Settings Dialog

Aus dem Menü des Hauptfensters oder mit dem Shortcut STR+S kann der Settings-Dialog aufgerufen werden. Man beachte, dass der Shortcut nur funktioniert, wenn kein GUI Element aktiv ist (wie etwa wenn gerade der Start/Stop Button gedrückt wurde).

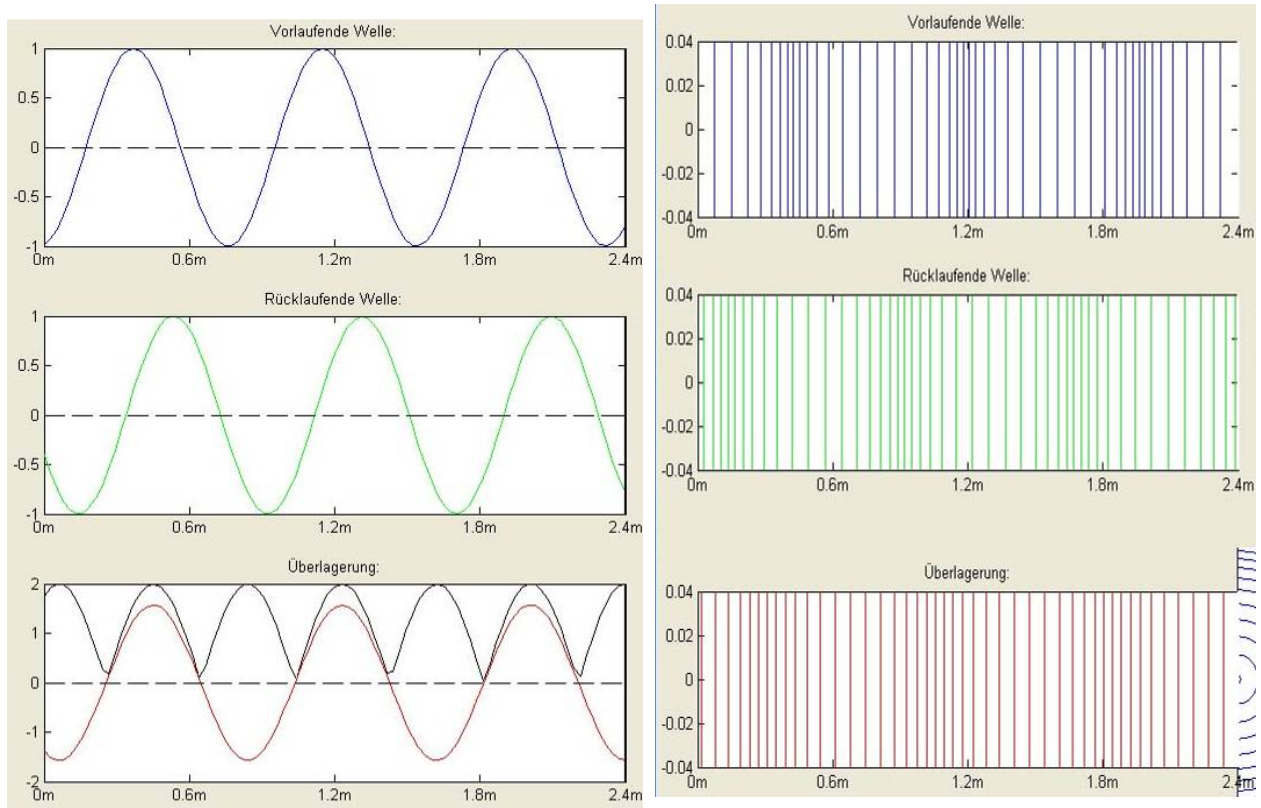
Im Dialog können noch einige Parameter eingestellt werden, die selten geändert werden und das GUI-Layout unübersichtlich gemacht hätten. Dies sind:

- die physikalischen Konstanten Rohrlänge und Rohrdurchmesser
- die Methode wie die viskose Rohrdämpfung bestimmt wird und, falls notwendig, das Textfile, in dem gemessene Rohrdämpfungen gespeichert sind. (siehe auch Abschnitt Messdatenauswertung)

- die maximale Anzahl der Reflexionen, die bei Nutzung des Skip-Buttons (Überspringen der Darstellung bis Erreichen eines eingeschwingenen Zustandes) berücksichtigt wird

## 3.4 Diagramme

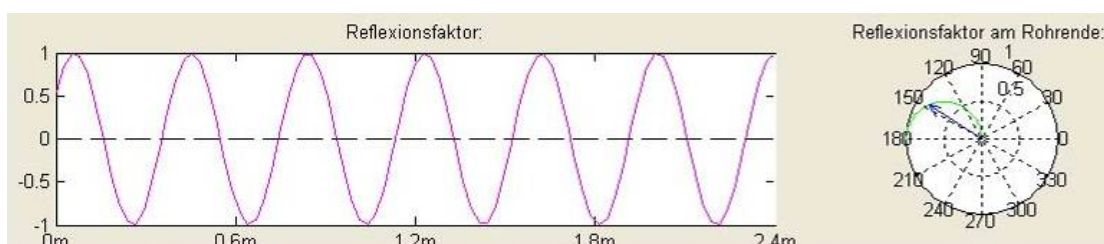
### 3.4.1 Funktionsdiagramme



Die ersten drei Diagramme stellen in dieser Reihenfolge die Amplitude der vor- und rücklaufenden Welle, sowie deren Überlagerung entlang des Rohres dar. Dabei ist zu beachten, dass sich der älteste Funktionswert bei der vorlaufenden Welle ganz rechts und bei der rücklaufenden ganz links befindet. Dies resultiert daraus, dass sich beide Wellen auch in dieser Darstellung von ihrem Ursprung wegbewegen.

In der Längs-Ansicht stellen die Diagramme einen Längsschnitt des simulierten Rohres dar. Die senkrechten Linien kann man sich als in das Rohr eingeschobene Ebenen vorstellen. Sie sind nicht wirklich im Kundtschen Rohr vorhanden sondern dienen nur zur Visualisierung der Auslenkung der Luftmoleküle.

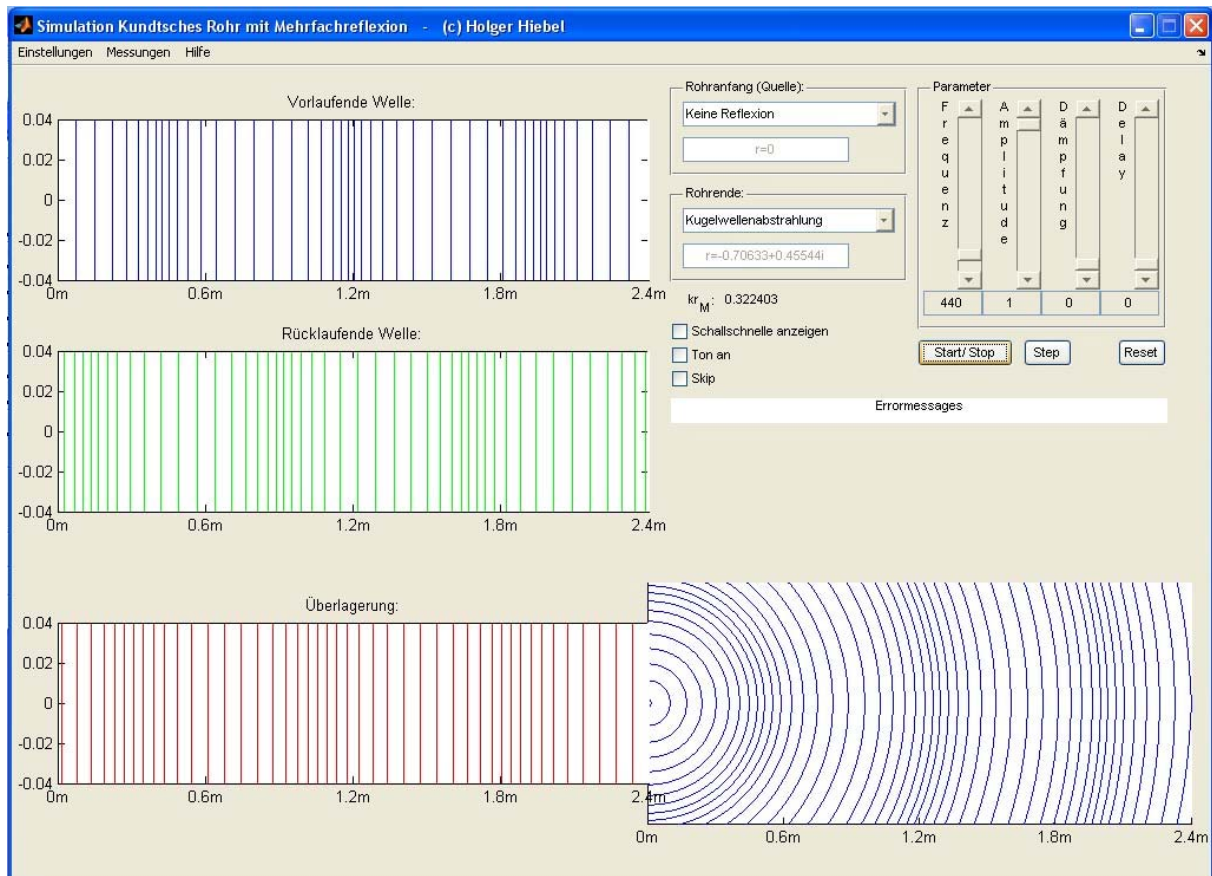
### 3.4.2 Reflexionsfaktor



Ist als Ansichtsoption „Transversal mit Reflexionsfaktor“ eingestellt wird unter den 3 Funktionsdiagrammen für die Wellen noch der Reflexionsfaktor  $r_L(x)$  in seiner Definition als  $p_r/p_h$  über die gesamte Rohrlänge dargestellt.

Außerdem wird der Reflexionsfaktor am Rohrende als Zeiger in einem Polardiagramm zusammen dargestellt, zusammen mit der Ortskurve der Abschlussimpedanz (wenn Kugelwellenabstrahlung oder Kolbenmembranabstrahlung eingestellt ist).

### 3.4.3 Abstrahlungsdarstellung



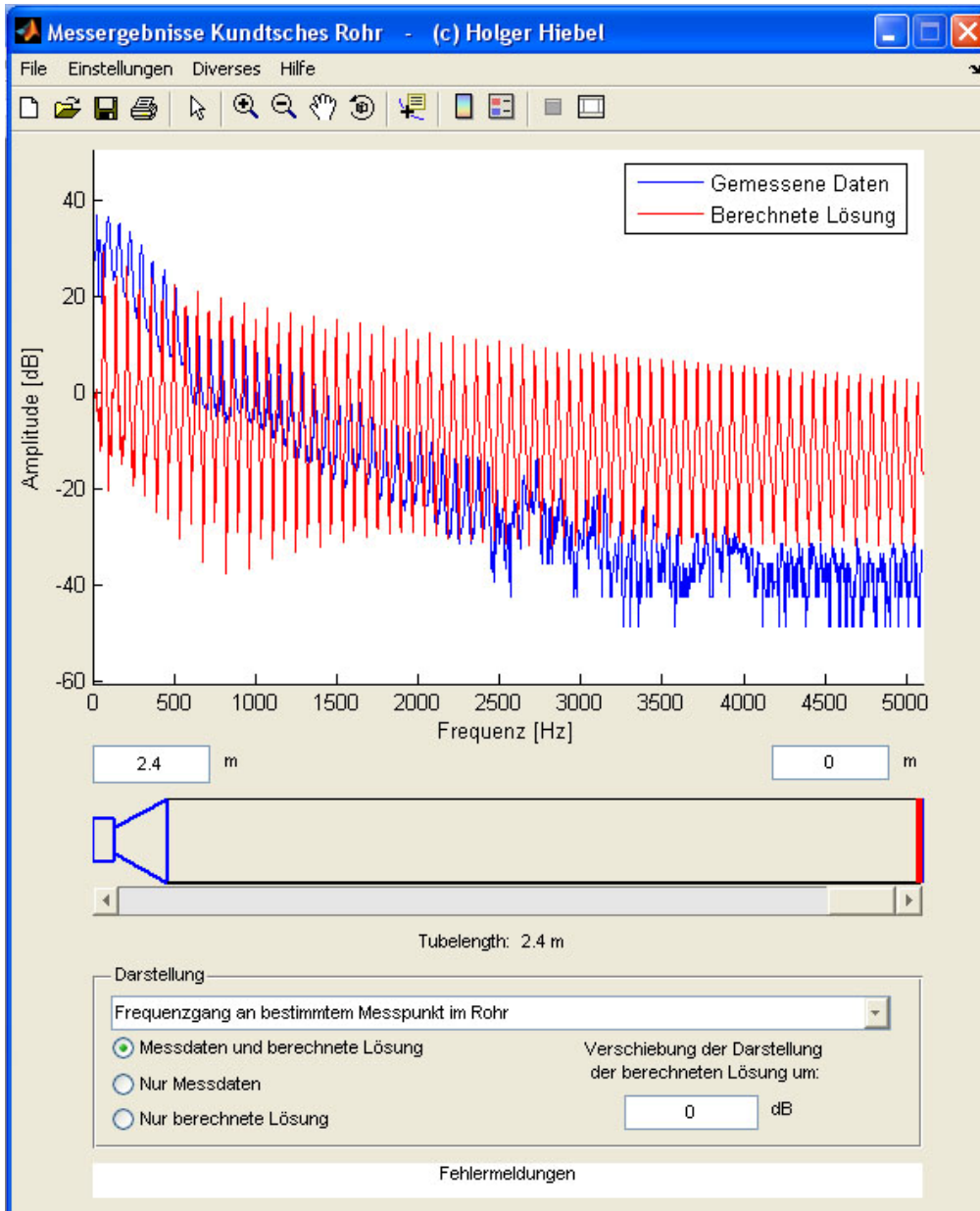
Hat man die Longitudinale Ansicht gewählt und wird als Abschluss am Rohrende die Kugelwellenabstrahlung oder die Kolbenmembranabstrahlung ausgewählt, wird rechts unten ein zusätzliches Diagramm eingeblendet, das die Abstrahlung visualisiert.

Auch hier erfolgt die Darstellung durch Linien, die im Querschnitt Bereiche gleicher Auslenkung der Schallteilchen im Schallfeld darstellen. Die Auslenkung wird verstärkt dargestellt.



# 4 Messung am Rohr

## 4.1 Das Darstellungs-Tool



Für die Auswertung von Messergebnissen mit dem am Institut vorhandenen Analyzer der Firma Bruel & Kjaer wurde ein eigenes Matlab-Tool mit GUI geschrieben. Gestartet werden kann es aus dem Menü des Simulations-Tools (*kundtsim.m*) heraus oder direkt durch den Start von *kundtmeas.m* in Matlab.

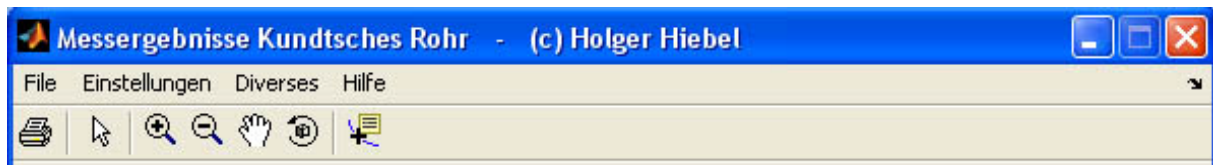
Die Messungen und ihre Dateinamen müssen dabei folgenden Kriterien entsprechen:

- Frequenzgangdaten und Impulsantworten müssen im B&K-eigenen \*.ADA-Format exportiert werden.
- Die Dateinamen der Impulsantworten müssen mit den Buchstaben IR beginnen, die der Frequenzgänge mit FR
- Dieses Präfix muss gefolgt werden von 4 Ziffern, die den Messpunkt im Rohr als Abstand in Millimeter vom Ende (Abschluss; rechts) des Rohres angeben.
- Alle Frequenzgänge müssen mit denselben Parametern gemessen werden, damit bei allen Frequenzgängen gleich viele „bins“ vorhanden sind.

Der Ordner, der per Default für die Messdaten-Files vorgesehen ist liegt im selben Verzeichnis wie die Programm-Files und heißt „measurement-files“.

Wurde das Programm zum ersten Mal gestartet, werden nach dem Start die Messdaten aus dem Default-Ordner importiert und die den Default-Parametern zugehörige Lösung für alle Frequenzen und Positionen numerisch berechnet. Für diese Berechnung wird die analytische Lösung des Problems im Frequenzbereich verwendet.

### 4.1.1 Das Menü



Die bei Matlab-Figures zur Verfügung stehenden Grafik-Tools wurden als Menüleiste eingeblendet. Dadurch ist es möglich in den dargestellten Plot zu zoomen und zu verschieben bzw. rotieren (wo möglich).

Die Menüstruktur ist folgendermaßen aufgebaut:

#### File

- *Copy figure as EMF to clipboard*  
Speichert die GUI als EMF in der Windows Zwischenablage
- *Load Analytical Solution*  
Öffnet einen Dialog zum Auswählen einer \*.mat-Datei, die vorher gespeicherte berechnete Lösung und die zugehörigen Parameter (Settings etc.) enthält (Es werden nur Dateien akzeptiert, die gültige Lösungen enthalten.)
- *Save Analytical Solution*  
Öffnet einen Dialog zum Speichern einer \*.mat-Datei, die die aktuelle Lösung und die zugehörigen Parameter (Settings etc.) enthält.

#### Einstellungen

- *Settings*  
Öffnet den Dialog mit weiteren Einstellungsmöglichkeiten

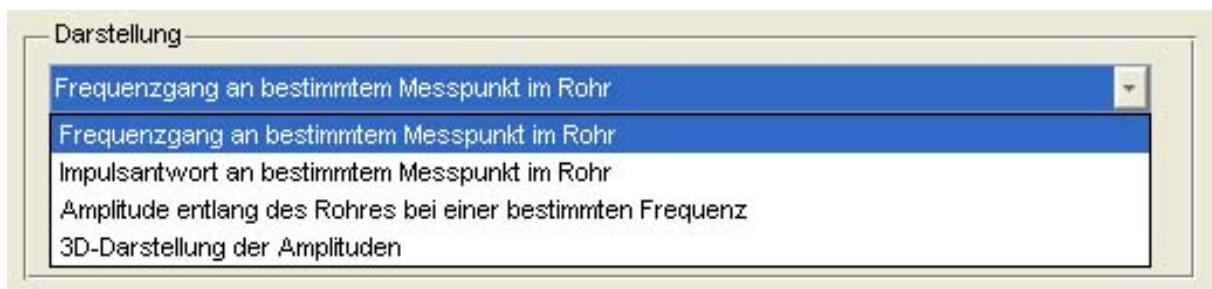
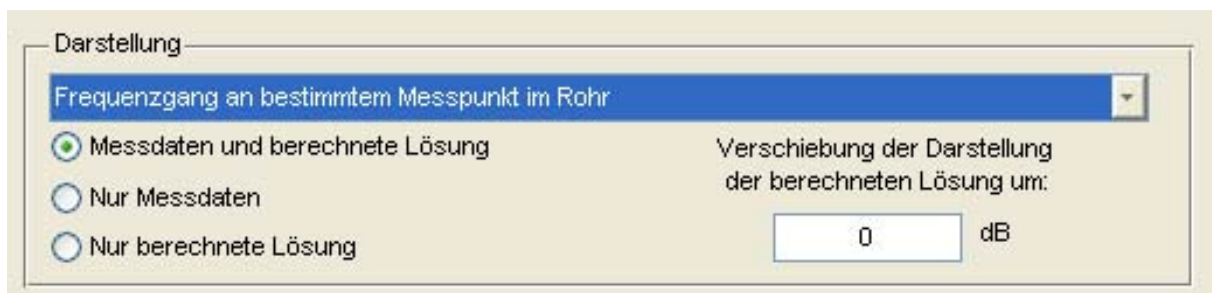
## Diverses

- *Surfaceplot berechnete Lösung*  
Öffnet ein zusätzliches Fenster mit der 3D-Darstellung der berechneten Lösung
- *Force Rebuild Data*  
Erzwingt das erneute Laden der Messdaten und Berechnen der Lösung

## Hilfe

- *About*  
Öffnet ein Fenster mit Informationen zum Programm

## 4.1.2 Darstellungs-Optionen



Dargestellt werden können (via Pulldown-Menü)

1. Frequenzgang (an bestimmtem Messpunkt im Rohr)
2. Impulsantwort (an bestimmtem Messpunkt im Rohr)
3. Amplitude (entlang des Rohres bei einer bestimmten Frequenz)
4. 3D-Darstellung der Amplituden (beinhaltet Frequenzgänge an allen Rohrpunkten und dadurch auch die Stehwellen)

Bei Punkten 1 und 3 kann man sich noch per Option-Buttons entscheiden, ob man nur Messdaten, nur berechnete Lösung oder beides zugleich darstellen will. Die berechnete Lösung kann per Eingabe in das Textfeld verschoben werden (bestätigen mit Return), um eine bessere Vergleichbarkeit zu erreichen, wenn die Kurven weit auseinander liegen. Eine 3D-Darstellung der berechneten Lösung kann über das Menü in einem Extra-Fenster eingeblendet werden.

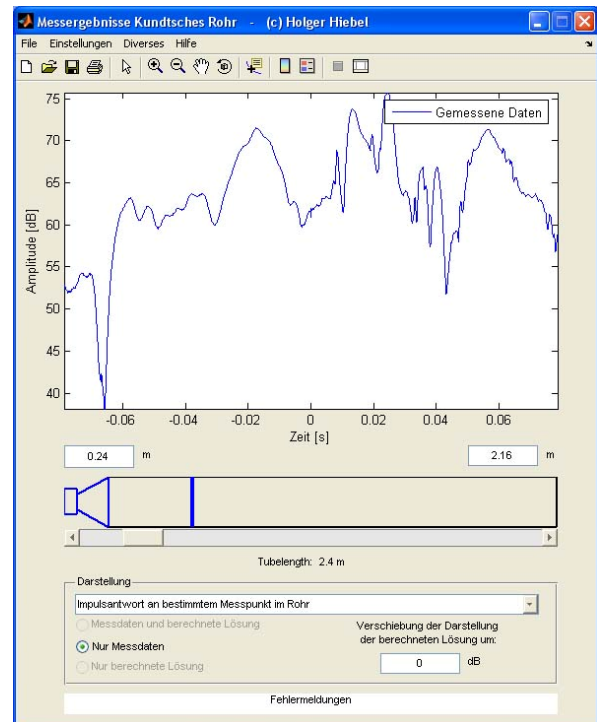
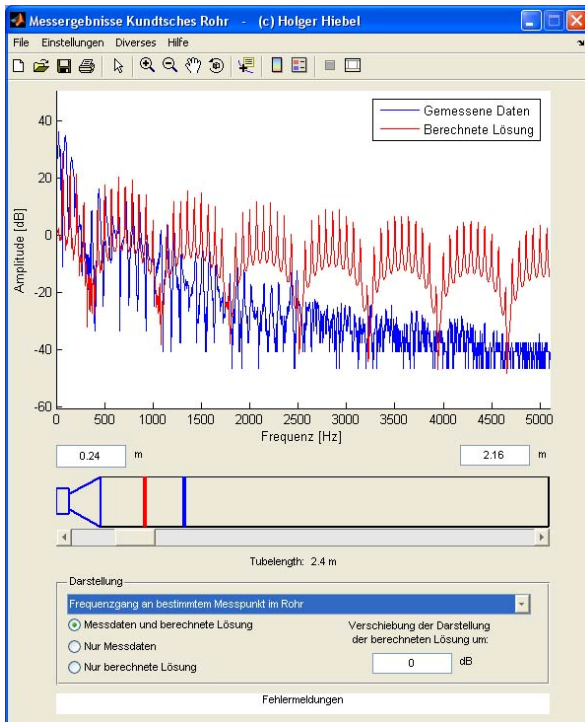


Abbildung 13 - Darstellung Frequenzgang (links) und Impulsantwort (rechts)

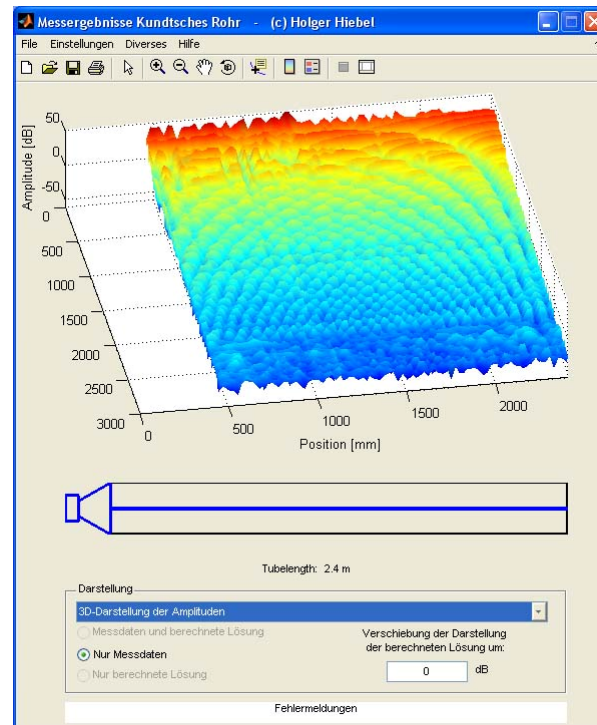
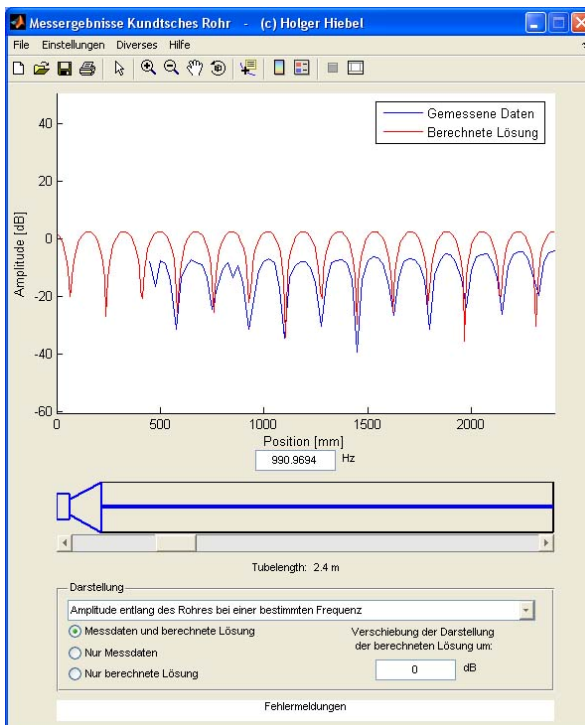
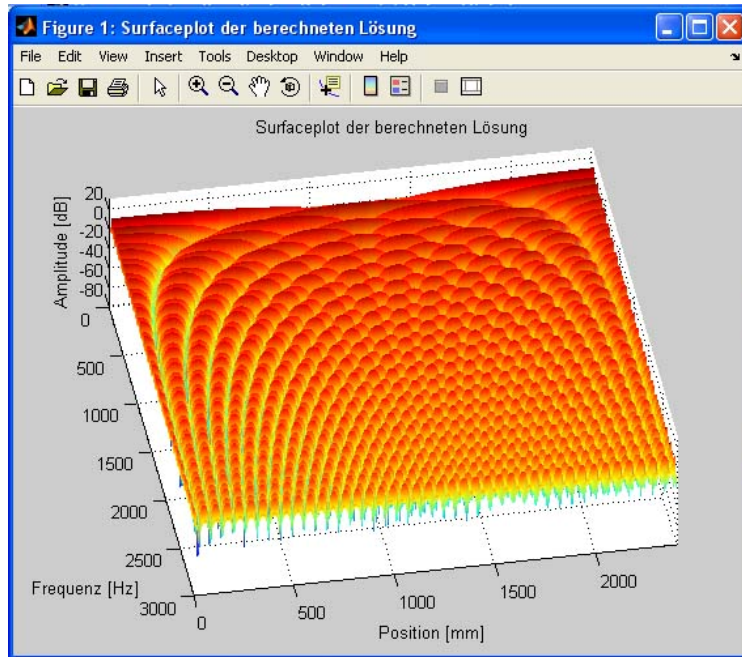


Abbildung 14 - Abbildung Stehwelle (links) und 3D-Darstellung (rechts)



**Abbildung 15 - 3D-Darstellung der berechneten Lösung**

In Abbildung 13 und Abbildung 14 sind auch noch 2 Dinge zu erkennen:

- Eine schematische Darstellung des Kundtschen Rohres
  - Werden Daten an einem bestimmten Punkt im Rohr dargestellt (Frequenzgang, Impulsantwort), ist dieser Punkt in der Skizze des Kundtschen Rohres (unterhalb der Messdatendarstellung) mit vertikalen Balken gekennzeichnet. Der blaue Balken steht dabei für die Position, von der die Messdaten zur Darstellung herangezogen werden. Der rote steht für die Position, von der die berechnete Lösung dargestellt wird. Die beiden Positionen müssen nicht zwingend dieselben sein, da die Lösung meist an mehr Punkten im Rohr berechnet wird, als Stellen mit Messdaten vorhanden sind. Will man die Messdaten und die berechnete Lösung an derselben Stelle im Rohr vergleichen, muss genau der Punkt mit dem Schieberegler oder Eingabefeld eingestellt werden.
  - Werden Daten entlang des Rohres dargestellt (Stehwelle, 3D), ist nur ein blauer horizontaler Balken in der Skizze zu sehen. Dieser soll Visualisieren, dass die Daten über der Rohrlänge aufgetragen sind.
- Die Eingabemöglichkeiten für Position oder Frequenz
  - Werden Daten an einem bestimmten Punkt im Rohr dargestellt (Frequenzgang, Impulsantwort), kann mit dem Schieberegler („Slider“) dieser Punkt verändert werden. Über dem Slider sind dann 2 Eingabefelder („Edits“) angeordnet, in denen der Abstand vom Rohranfang oder Rohrende eingegeben werden können. Slider und Edits werden immer zueinander synchronisiert
  - Werden Daten entlang des Rohres dargestellt (Stehwelle), bestimmt der Schieberegler die Frequenz, die zur Auswertung herangezogen werden. Über dem Slider ist dann ein Eingabefeld für die Frequenz zu sehen. Die anderen Eingabefelder sind ausgeblendet.



## 4.1.3 Settings Dialog

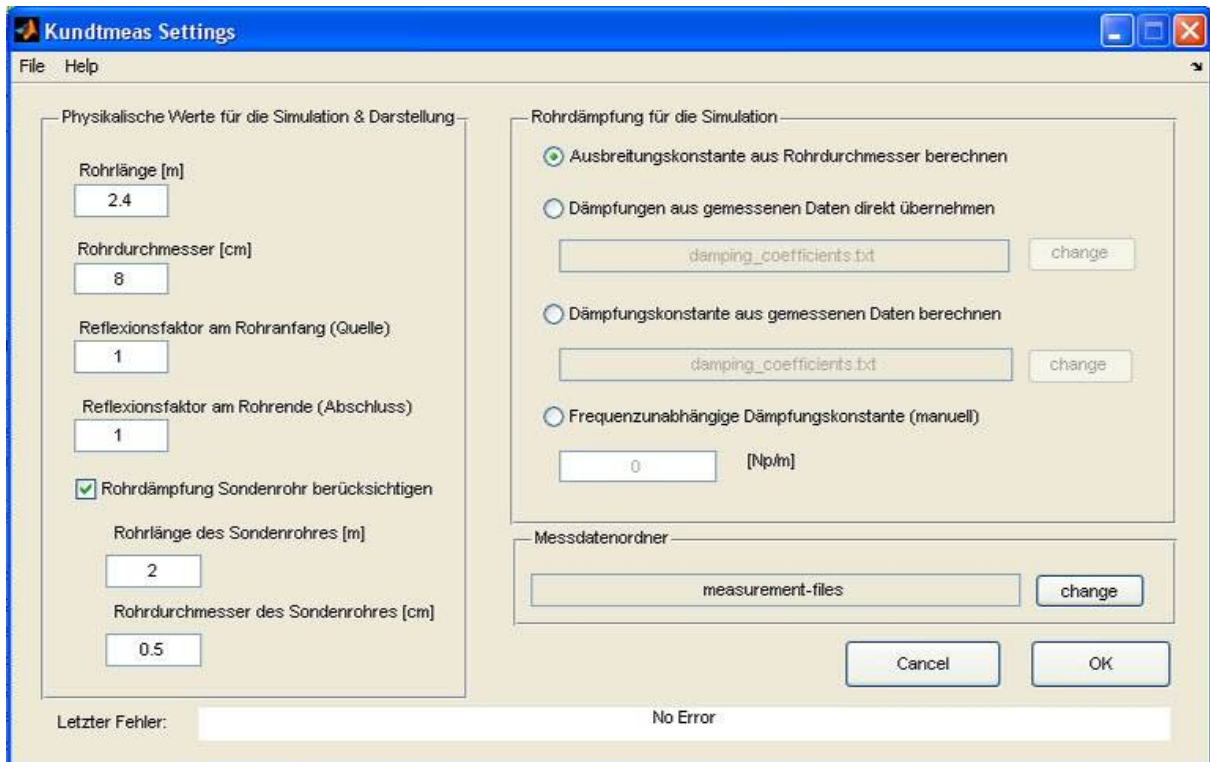


Abbildung 16 - Settings Dialog der Messdatenauswertung

Wählt man im Menü des Hauptfensters das Menü Einstellungen und den Menüpunkt Settings aus, öffnet sich das nicht-modale (das ist leider nicht anders möglich) Settings-Dialogfenster.

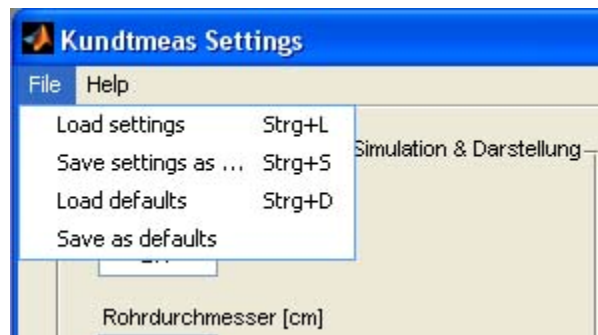
In der linken Hälfte des Dialoges befinden sich verschiedene Eingabefelder (Edit-Felder) zur Änderung physikalischer Parameter. Eine Fehlerüberprüfung für die Eingabefelder ist vorgesehen. Fehlermeldungen erscheinen am unteren Dialogfeldrand.

In der rechten Hälfte befindet sich ein Rahmen, in dem man mit Option-Buttons die Methode bestimmen kann, nach der die Rohrdämpfung bestimmt wird. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie die Rohrdämpfung berücksichtigt werden kann:

- Die frequenzabhängige Ausbreitungskonstante wird nach einem analytischen Rohrmodell mit viskoser Reibung der Luft an den Rohrwandungen aus dem Rohrdurchmesser berechnet.
- Die Dämpfungen werden aus einer wählbaren Textdatei, die Frequenz-Dämpfungs-Wertepaare enthält, entnommen. Zwischen und außerhalb der dort angegebenen Werte wird interpoliert bzw. extrapoliert.
- Die Dämpfungen aus der wiederum frei wählbaren Textdatei mit Wertepaaren werden benutzt um das analytische Modell zu fitten. Die daraus erhaltene Konstante wird dann bei der Simulation weiterverwendet
- Eine frequenzunabhängige Dämpfungskonstante wird über das Textfeld definiert

Der Ordner, in dem die Messdaten liegen, kann ebenfalls geändert werden.

Im Menü File kann man die Einstellungen speichern oder laden bzw. als Defaults speichern und die Defaults laden.



**Abbildung 17 - Menü File in Kundtmeas Settings**

## 4.2 Messergebnisse

### 4.2.1 Allgemeines

An dem am Institut für Breitbandkommunikation vorhandenen Kundtschen Rohr wurden Impulsantworten bzw. Frequenzgänge im Abstand von 2,5 cm entlang des Rohres gemessen. Der Messaufbau wurde dazu von den Teilnehmern eines zuvor stattgefundenen Labors erstellt.

Der Messbereich dieses Rohres beträgt knapp 2 Meter (1,95m). Das Rohr selbst ist aus dickwandigem Aluminium gefertigt. Die Messsonde im Aluminiumrohr, an der das Messmikrofon befestigt wird, besteht aus Messing. Anschließend an den Messbereich führt im Winkel von 45 Grad ein Rohrstück zum Lautsprecher:

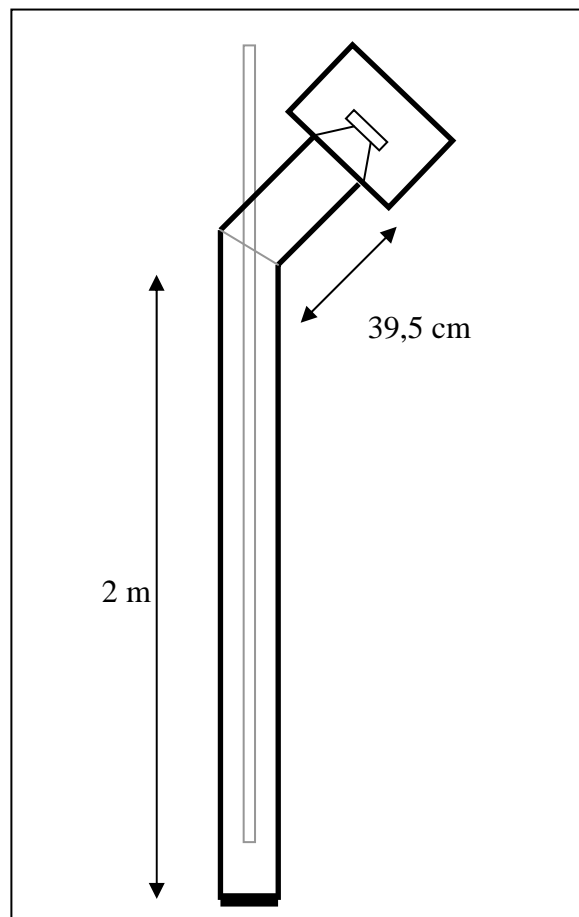


Abbildung 18 – Skizze & Abmessungen des Rohres

Der Knick wird die nahezu ebene Wellenausbreitung im Rohr *wahrscheinlich* nicht wesentlich beeinflussen, da der Querschnitt des Rohres unverändert bleibt.



## 4.2.2 Stehwellen, Resonanzen

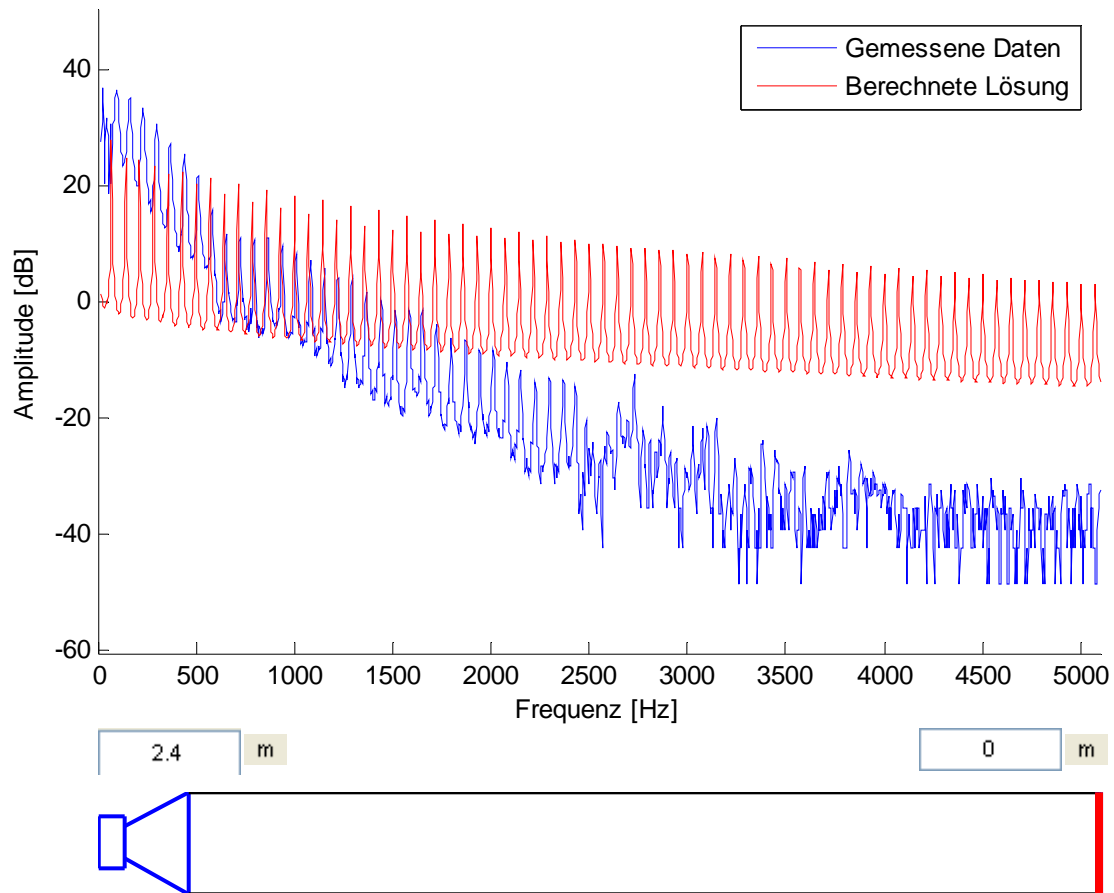


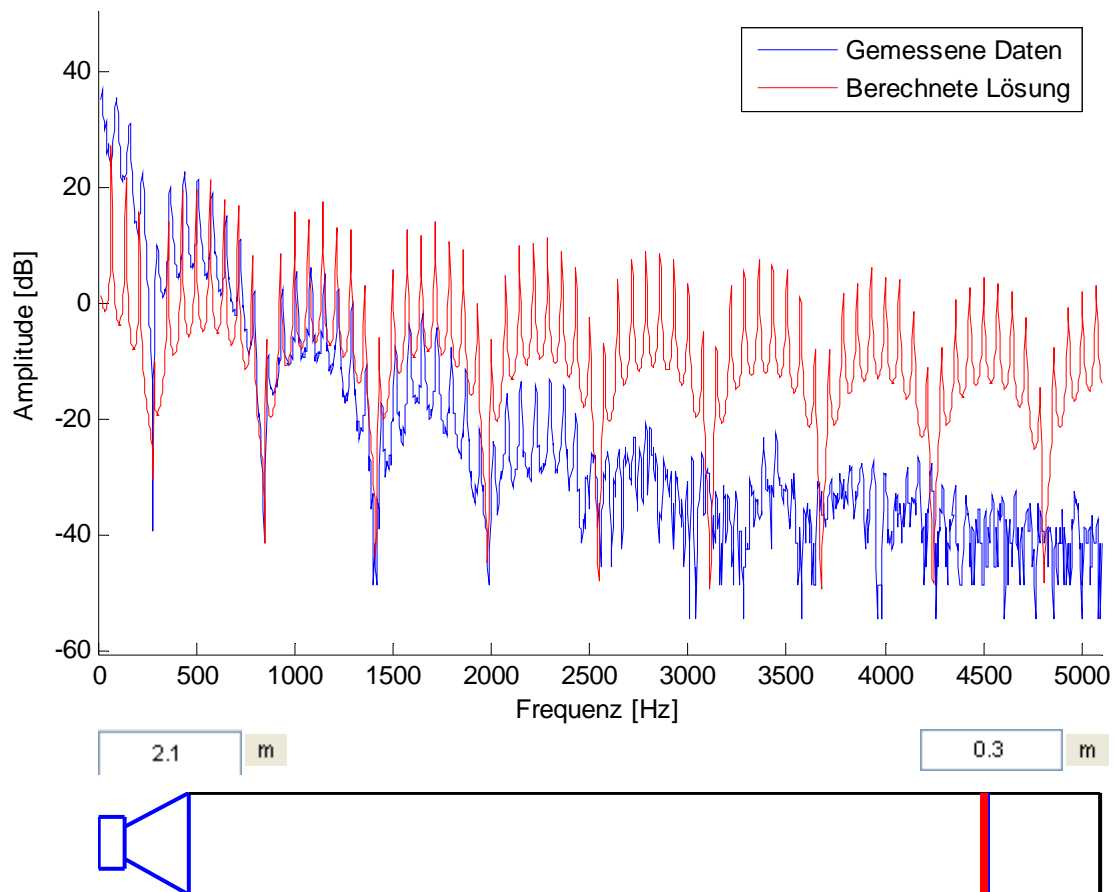
Abbildung 19 - Frequenzgang am Rohrende (geschlossen)

In Abbildung 19 ist der Frequenzgang am Rohrende dargestellt. Für die berechnete Lösung wurde der Theorie folgend  $r_0=r_L=1$  (Totalreflexion) angenommen.

Ab etwa 2500 Herz verschwindet das gemessene Signal im Rauschen. Auffällig ist der stark abfallende Frequenzgang in den Messdaten.

Dieser große Abfall kann nicht aus einer höheren Dämpfung des Kundtschen Rohres selbst erklärt werden, da die Resonanzhöcker in den Messdaten in etwa die gleiche Höhe haben, wie bei tieferen Frequenzen. Bei höherer Dämpfung wäre aber die Resonanzüberhöhung viel kleiner.

Einen großen Einfluss hat hier die Dämpfung des Sondenrohres. Allerdings muss man dazu noch folgendes sagen: Um in der Simulation einen annähernd steilen Abfall für den Amplitudenfrequenzgang wie in der Messung zu erhalten, muss man den Sondenrohrdurchmesser auf viel kleinere Werte stellen als er in Wirklichkeit ist. Eventuell gab es daher auch in der Messkette noch einen zusätzlichen nicht-kompensierten Frequenzgang.



**Abbildung 20 - Frequenzgang im Rohr**

Wählt man eine Position im Rohr, so kommt eine periodische Struktur zum Vorschein, die an eine Stehwelle erinnert. Das ist klar, weil für einen Punkt im Rohr bei bestimmten Frequenzen die Stehwelle dort minimal wird (destruktive Interferenz von vor- und rücklaufender Welle).

## 4.2.3 Resonanzverschiebung

### 4.2.3.1 Messergebnisse und Simulation mit „kuntmeas“

Interessant ist der Umstand, dass sich die Resonanzfrequenzen der Simulation für ein beidseitig geschlossenes Rohr nicht mit denen der Messung decken:

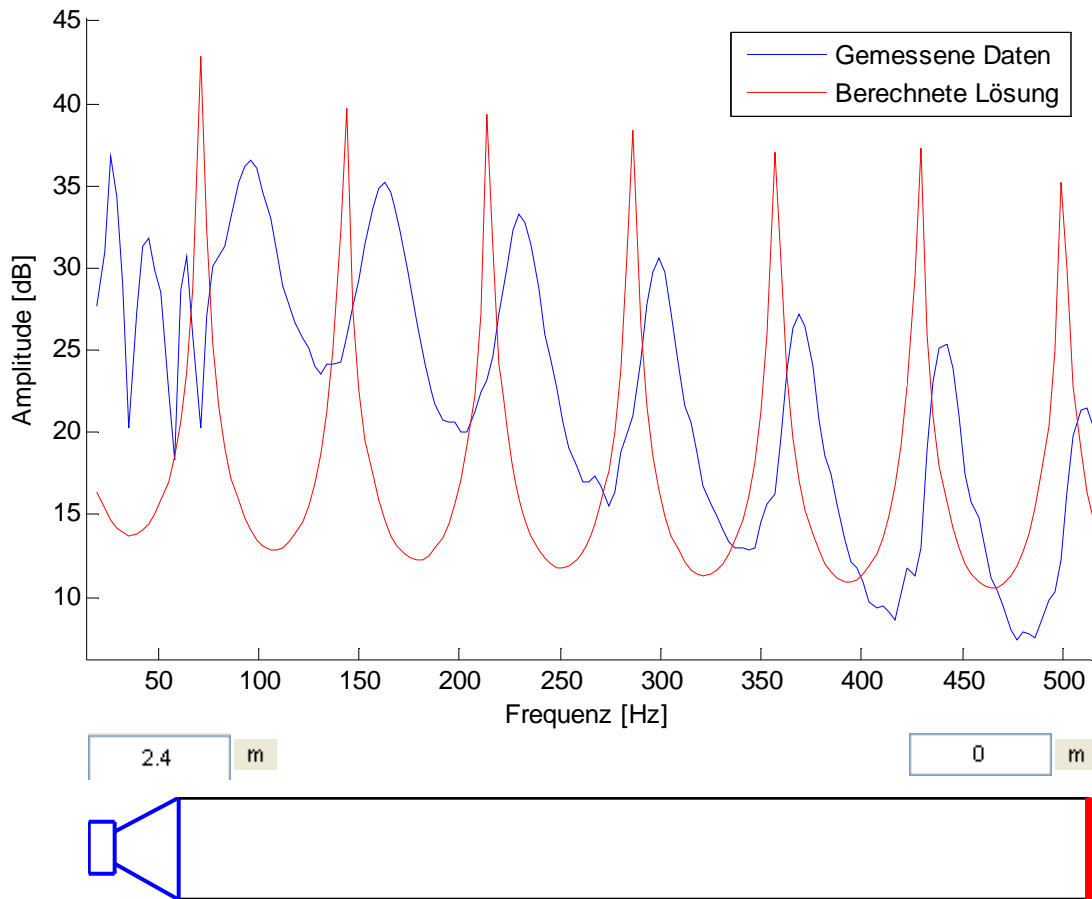


Abbildung 21 - Detail Frequenzgang am Rohrende

Betrachten wir die untersten Resonanzfrequenzen noch genauer:

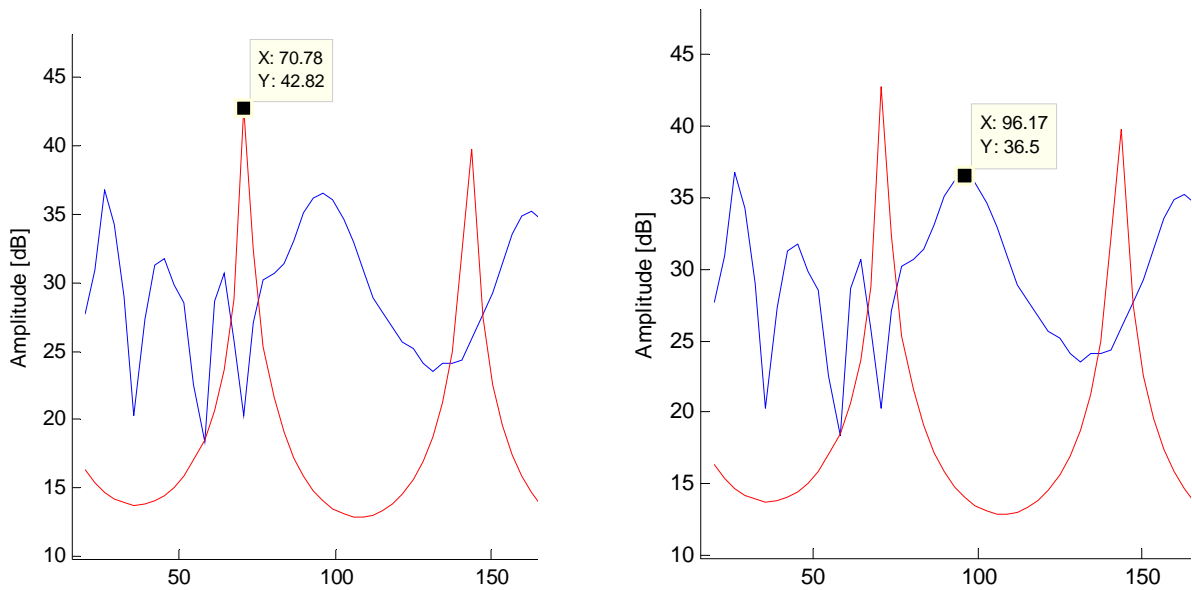


Abbildung 22 - Niedrigste sichtbare Resonanzfrequenzen

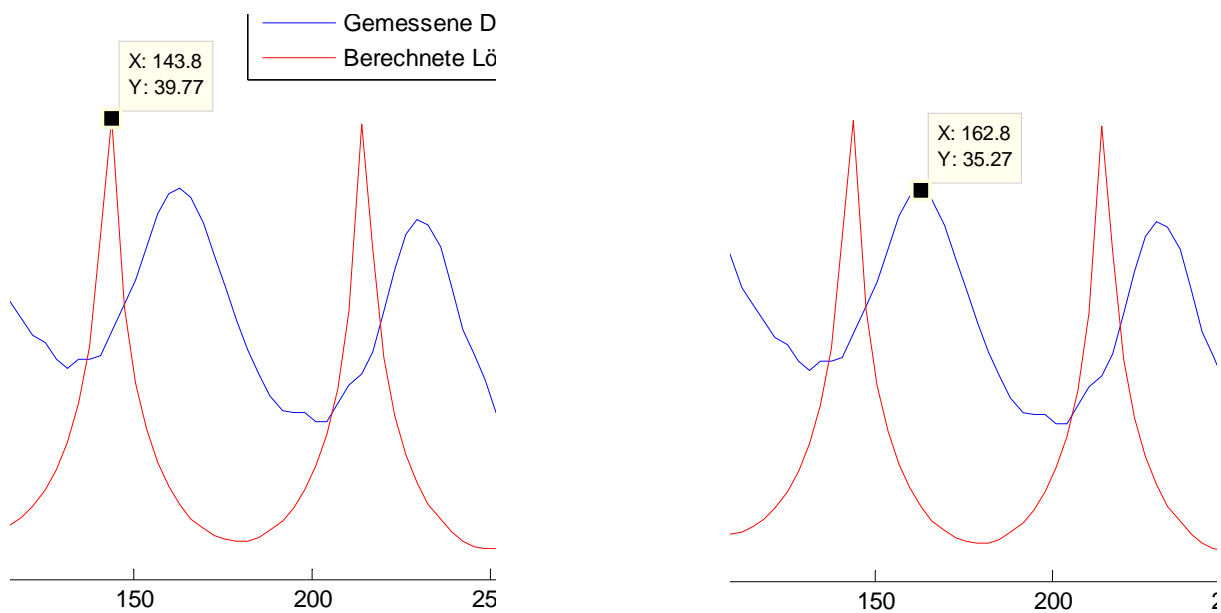


Abbildung 23 - Zweitniedrigste Resonanzfrequenzen

Die Resonanzfrequenzen der berechneten Lösung liegen recht genau auf den zu erwartenden Frequenzen, die sich aus

$$\omega_p = \frac{2k\pi + \arg(r_0 \cdot r_L)}{2 \cdot \frac{L}{c}}$$

zu

$$f_{res,k} = k \cdot \frac{c}{2L} = k \cdot \frac{343}{2 \cdot 2.4} = 71.5, 142.9, 214.4, \dots$$

für ein beidseitig geschlossenes Rohr ergeben (Ableseung ergibt  $f_{res,0,Rechnung}=70.78 \text{ Hz}$ ). Die gemessenen Resonanzen sind dagegen verschoben ( $f_{res,0,Messung}=96.17 \text{ Hz}$ ). Auf Grund der Artefakte der Messung (die TDS-Messung ) unterhalb von ca. 70 Hz lässt sich aber nicht genau sagen, ob die unterste sichtbare Resonanz in der Messung auch die unterste tatsächlich vorhandene Resonanzfrequenz ist (diese läge im „ungünstigsten“ Fall, nämlich beim einseitig geschlossenen Rohr, bei etwa 35 Hz).

Dass die akustisch maßgebliche Rohrlänge etwa 2.4 Meter ist, lässt sich auch aus dem mittleren Abstand zwischen den Resonanzhöckern in den Messdaten unterhalb von etwa 2500 Hz schön ablesen (siehe Tabelle 1). In der Tabelle ist auch ersichtlich, dass die Differenz zwischen den Resonanzen eine leichte Tendenz aufweist, zu hohen Frequenzen hin zu steigen.

Aus den Daten ergibt sich ein Mittelwert der Differenz  $\Delta f$  von 71.0259 Hz und eine Standardabweichung der Differenz  $\Delta f$  von 2.4929

Eine Resonanzfrequenz von 71 Hz entspricht einer wirksamen Rohrlänge von

$$\Delta f_{res} = \frac{c}{2L} \Rightarrow L = \frac{c}{2 \cdot f_{res,k}} = \frac{343}{2 \cdot 71} = 2.415 \text{ m}$$

Vom Knick in der Röhre sind auch in den Messergebnissen keine störenden Artefakte in Form von Reflexionen zu sehen.

Für ein einseitig offenes, einseitig geschlossenes Rohr der Länge 2.4 Meter würden sich die Resonanzfrequenzen zu

$$f_{res,k} = (2k + 1) \cdot \frac{c}{4L} = (2k + 1) \cdot \frac{343}{9.6} = 35.7, 107.2, 178.6, \dots$$

Das ist auch weit entfernt von den gemessenen:

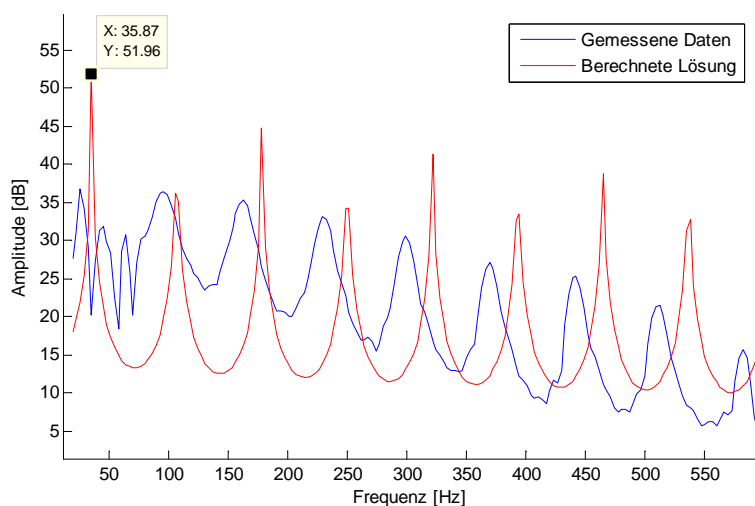


Abbildung 24 - Resonanzfrequenzen, Simulation mit einseitig offenem Rohr

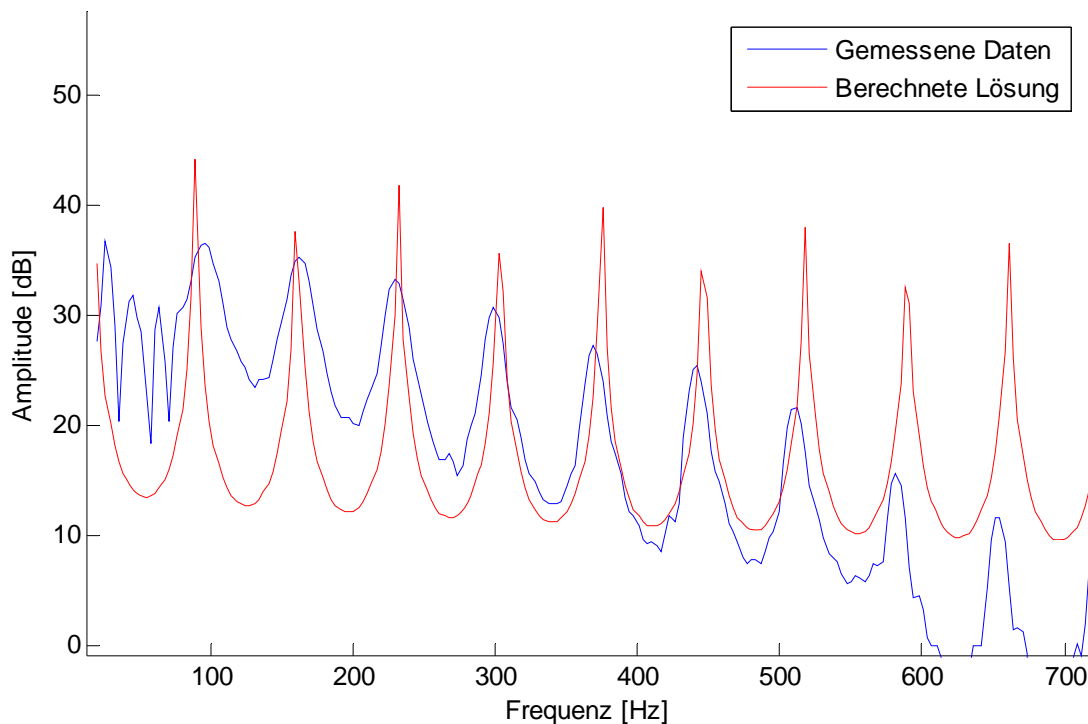
$f_{res,k}$	$\Delta f$
96.17	
162.8	66.63
229.5	66.7
299.3	69.8
369.1	69.8
442.1	73.0
511.9	69.8
581.8	69.9
654.8	73.0
724.6	69.8
794.4	69.8
867.4	73.0
937.2	69.8
1010	72.8
1083	73.0
1153	70.0
1223	70.0
1293	70.0
1369	76.0
1442	73.0
1515	73.0
1585	70.0
1651	66.0
1724	73.0
1797	73.0
1870	73.0
1943	73.0
2013	70.0
2080	67.0
2150	70.0
2226	76.0
2299	73.0
2369	70.0

Tabelle 1 - gemessene Resonanzfrequenzen am Rohrende und Differenz zwischen ihnen

Dass in Abbildung 24 nicht alle Resonanzspitzen ähnlich hoch sind liegt im Übrigen daran, dass die Datenpunkte, an denen die Lösung berechnet wird nicht fein genug liegen, um auch so schmale Maxima genau zu treffen.

Wie aber könnte man jetzt die Messung und die Simulation in Einklang bringen?

Nimmt man als Reflexionsfaktor am Rohranfang  $r_0=j$  (bei  $r_L=1$  und  $L=2.4m$ ) so erhält man:



Hier ist eine wesentlich bessere Übereinstimmung der Resonanzfrequenzen zu sehen.

Da stellt sich die Frage, wie der Reflexionsfaktor von  $j$  an der Lautsprecherseite zu erklären ist. Man müsste die Gleichungen für das gekoppelte System untersuchen:

- War eventuell versehentlich noch ein Messwiderstand in Serie mit dem Lautsprecher und damit nicht mehr die Schnelle eingepreist?
- Waren Undichtheiten und dadurch akustische Massen an der Lautsprecherseite vorhanden?
- Als alternative, aber eher unwahrscheinliche, Möglichkeit käme noch ein Bug beim Export von Frequenzgängen im \*.ADA-Format aus dem B&K-Analyzer in Frage:

Die Daten werden korrekt aus den abgespeicherten \*.ADA-files in die Matlab-Umgebung importiert, dies wurde händisch durch Vergleich der Darstellung mit dem Inhalt der files sichergestellt. In einigen \*.ADA-files waren aber offensichtliche Fehler in der Struktur der gespeicherten Daten vorhanden, die händisch korrigiert wurden. Es ist also wohl nicht zu weit hergeholt anzunehmen, es könnte noch andere Bugs beim Exportieren geben.

Hier ein Ausschnitt aus einer \*.ADA-Datei mit Frequenzgangdaten:

"TSR fund. "

20.0000,27.6778  
 23.1738,30.9085  
 26.3477,36.7367  
 ....

Wobei in der ersten Spalte die Frequenz und in der zweiten die Amplitude eingetragen ist. Interessanterweise ergibt sich nun der Fall, dass die unteren Resonanzfrequenzen ziemlich genau um 20 Hertz gegenüber der Simulation nach oben verschoben sind. Verschiebt man die Messkurve um diese 20 Hertz nach unten, ergibt sich für die untersten Resonanzen wieder eine erstaunliche Passgenauigkeit:

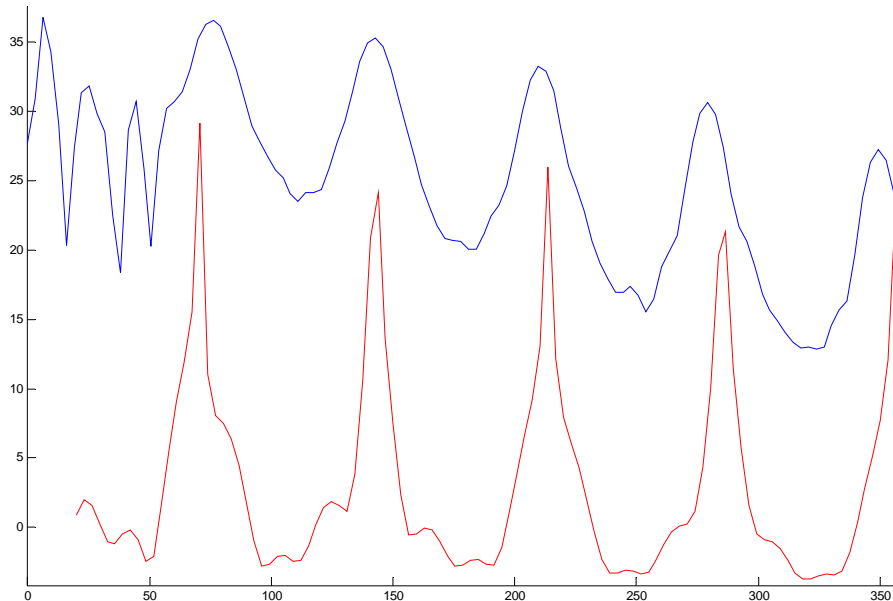


Abbildung 25 - Messdaten um 20 Hz nach unten verschoben

#### 4.2.3.2 Simulation mit AkAbak

Um Betrachtungen am gekoppelten System Lautsprecher / Rohr anstellen zu können, wurde die renommierte Software AkAbak genutzt. Mit AkAbak können elektroakustische Netzwerke aus konzentrierten Elementen und eindimensionalen Wellenleitern simuliert werden. Die Eingabe basiert dabei auf einem Skript, eine grafische Darstellung der Netzwerke ist im Programm leider *nicht* möglich.

##### 4.2.3.2.1 Simulation Lautsprecher + einfaches Rohr

Mit einem kleinen Breitband-Chassis der Firma Visaton (Typ „WS100 4OHM“) als exemplarisches Beispiel für einen Kleinlautsprecher, wurde ein Netzwerk aus Gehäuse, Lautsprecher und 2.4m-Rohr (geschlossen) simuliert.

Das Skript dazu:

```
| Definitions
|-----
| Example for Driver:
```

```

| Visaton WS100 4 OHM 8cm Tiefmitteltöner
Def_Driver "WS100"
  fs=67Hz
  Vas=5.2L
  Qms=1.97
  Qes=0.55
  Re=4ohm
  Le=0.47mH
  dD=8cm

```

```

| Systems
|-----
System 'KundtTube'

| Generator resistance -----
Resistor 'Rgen'      R=0.01ohm  Node=1=2

| Loudspeaker -----
Driver              Def="WS100" Node=2=0=3=4

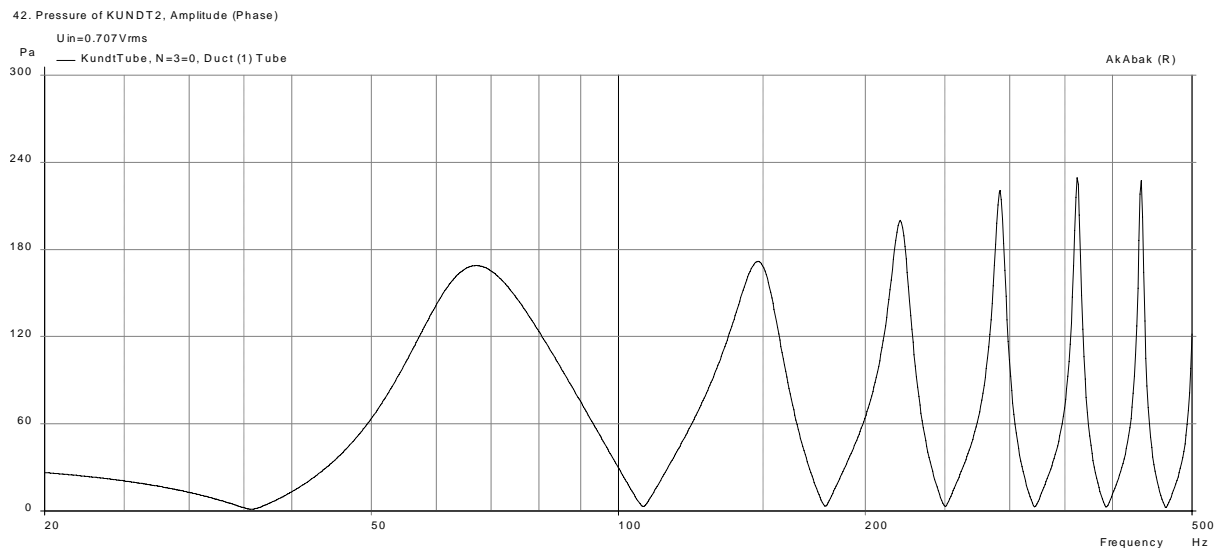
| Back-enclosure -----
Enclosure           'Enc' Node=4      Vb=8L

| Acoustic Impedance-tube -----

| duct only -----
duct 'Tube'         Node=3      Len=2.4m  dD=0.08m

```

Der Frequenzgang des Druckes im Rohr an der Stelle des Lautsprechers bis 1000 Hz zeigt dabei folgendes Bild:



**Abbildung 26 - AkAbak Simulation gekoppeltes System**

Die Lage der Resonanzfrequenzen stimmt dabei bis auf wenige Hertz (etwa 5 Hz) Abweichung genau überein mit den theoretischen Werten für ein beidseitig geschlossenes Rohr:



Ablesung aus Simulation für einfaches geschlossenes Rohr:

$$f_{res,n,Simulation\ AkAbak} = 67, 148, 220, 291, \dots \text{ [Hz]}$$

zum Vergleich die theoretischen Werte:

$$f_{res,n,Rohr\ theoretisch} = 71.5, 142.9, 214.4, 285.8, \dots \text{ [Hz]}$$

und die Werte aus der Messung vom Rohr:

$$f_{res,n,Rohr, Messung} = 96.2, 162.8, 229.5, 299.3, 369.1, \dots \text{ [Hz]}$$

#### 4.2.3.2.2 Hoher Generatorwiderstand, Lautsprecher + Einfaches Rohr

Erhöht man nun in der Simulation den Generatorwiderstand auf 1 kOhm und passt die Achsenskalierung an die geringere Empfindlichkeit an, erhält man folgendes Bild:

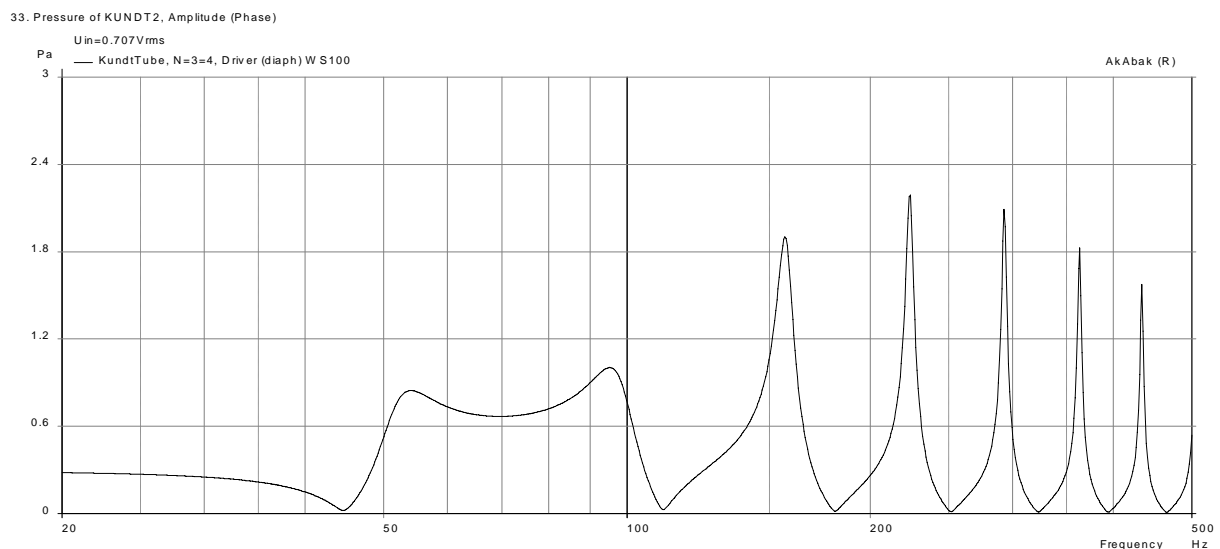


Abbildung 27 - AkAbak Simulation mit 1kOhm Generatorwiderstand

Mit den Maxima bei:

$$f_{res,n,Simulation\ AkAbak} = 54, 95, 157, 224, 293, \dots \text{ [Hz]}$$

Das liegt (bis auf die unterste ablesbare Resonanz in der Simulation) gut (+1 - +6Hz Abweichung) mit den gemessenen Werten überein:

$$f_{res,n,Rohr, Messung} = 96.2, 162.8, 229.5, 299.3, 369.1, \dots \text{ [Hz]}$$

Jedoch sind die 2 untersten Resonanzhöcker nur schwach ausgeprägt und schlecht getrennt.

#### 4.2.3.2.3 Undichtheit am Rohranfang als akustische Masse

Nehmen wir am Rohranfang (direkt nach dem Lautsprecher) eine Undichtheit *nach außen hin* an, die sich als akustische Masse äußert, lässt sich das durch folgende Änderung im Skript berücksichtigen:

| Impedance-tube -----

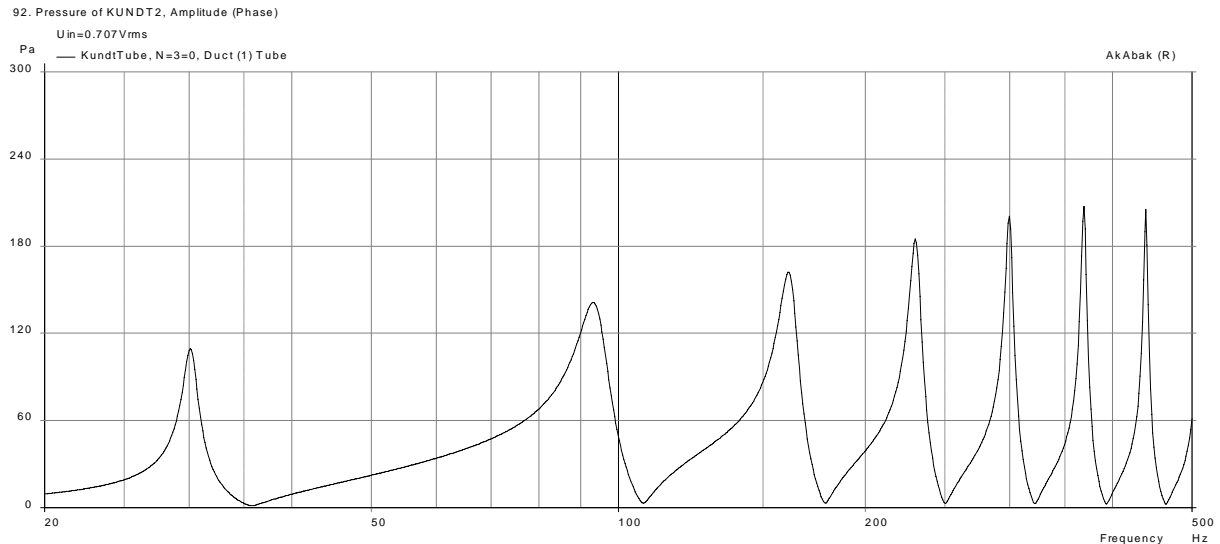
```

| acoustic mass (to outside) -----
AcouMass   'OutMass'   Node=3   Ma=100kg/m4   Ra=1Pas/m3

| duct only -----
duct       'Tube'      Node=3      Len=2.4m    dD=0.08m

```

Mit den “frei erfundenen” Werten für  $Ma$  und  $Ra$  ergibt sich folgendes Bild:



**Abbildung 28 - AkAbak Simulation mit zusätzlicher akustischer Masse am Rohranfang**

Abgesehen von der untersten Resonanz (die in der Messung, sofern vorhanden, nicht ablesbar wäre) ergibt sich eine erstaunliche Übereinstimmung der Resonanzen:

Ablesung aus der Simulation für einfaches geschlossenes Rohr:

$$f_{res,n,Simulation\ AkAbak} = 30, 93, 161, 230, 300, 369, \dots \text{ [Hz]}$$

Die Werte aus der Messung vom Rohr:

$$f_{res,n,Rohr, Messung} = 96.2, 162.8, 229.5, 299.3, 369.1, \dots \text{ [Hz]}$$

Akustische Massen wären über folgende Beziehung zu bestimmen:

$$M_a = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

$\rho$  ... Dichte der Luft ( $\approx 1.19 \text{ kg/m}^3$ )

$l$  ... Länge des Luftvolumens

$A$  ... Querschnittsfläche des Luftvolumens

Herr Prof. Graber vermutet eine akustische Masse im Übergangsbereich, in dem der Lautsprecher in das Rohr einstrahlt. In der Praxis wird oft angenommen, dass sich die ebene Welle im Rohr erst in einem Abstand von 4 mal dem Rohrdurchmesser von der Quelle entfernt ausgebildet hat. Für die  $100 \text{ kg/m}^4$  von oben, die die gute Korrelation von gemessenen und simulierten Resonanzfrequenzen ergibt, kommt man mit der Querschnittsfläche des Rohres ( $0.04^2 \cdot \pi$ ) auf eine äquivalente Länge des Luftvolumens von

0.42 m. Dies entspräche in etwa der Länge des Schätzwertes für den Abstand innerhalb dessen es zu Abweichungen von der ebenen Wellenausbreitung kommt.

#### 4.2.3.2.4 Rohrknick als akustische Masse

Laut Jörg Panzer<sup>1</sup> (seine Referenz: Morse, Ingard „Theoretical Acoustics“) wirkt ein Knick in einem Wellenleiter (Rohr) wie eine akustische Masse. Für 90°-Biegungen von Wellenleitern mit konstantem Querschnitt bestimmt sich diese akustische Masse näherungsweise zu  $Ma=1.85/WD$ , wobei  $WD$  die Weite des Tunnels darstellt.

Wir fügen anstatt eines einfachen Rohrs in der Simulation eine Hintereinanderschaltung aus Rohr, Masse und Rohr ein:

```
| duct-acoustic mass-duct (see Morse/Ingard)-----
duct          'Duct1'          Node=3=5    Len=0.4m    dD=0.08m
AcouMass      'Mass1'          Node=5=6    Ma=100kg/m4
duct          'Duct2'          Node=6=7    Len=2.0m    dD=0.08m
```

Die akustische Masse nach obiger Formel wäre  $Ma=1.85/WD=1.85/0.08=23.125 \text{ kg/m}^4$ . Die Simulation bringt aber *keine* sinnvollen Ergebnisse, auch für verschiedene Werte von ~~akustischen Massen~~. Hier etwa die Simulation mit dem Wert von  $23.125 \text{ kg/m}^4$

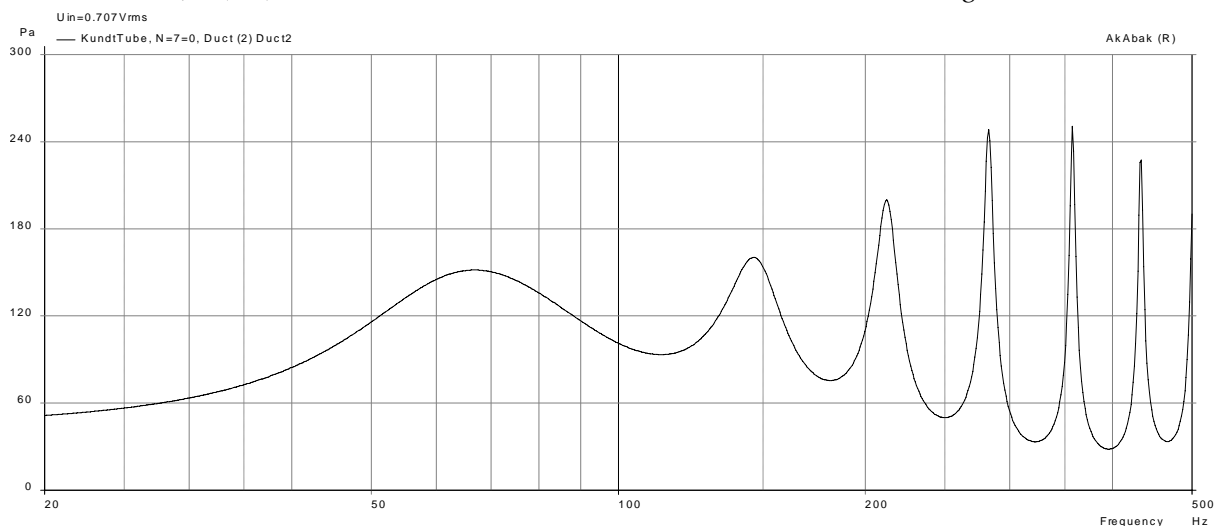


Abbildung 29 - Simulation mit AkAbak - akustische Masse durch Rohr-Knick

Eine Änderung der akustischen Masse im Bereich von  $10\text{-}30 \text{ kg/m}^4$  bringt keine wesentlichen Schwankungen für die Stellen der simulierten Resonanzfrequenzen mit sich.

#### 4.2.3.3 Conclusio und Ausblick

Wie man gesehen hat, ließe sich die Verschiebung der Resonanzen um etwa 20 Hz nach oben, gegenüber der zu erwartenden Resonanzreihe wie für ein beidseitig geschlossenes Rohr, durch verschiedene Effekte erklären:

- Exportfehler in die \*.ADA-files
- Akustische Masse durch Undichtheiten im Aufbau oder Effekte wegen der Einstrahlung des Lautsprechers in das Rohr
- Hochohmig angesteuertes Lautsprecherchassis

<sup>1</sup> Jörg Panzer, „Simulation komplexer Lautsprechergehäuseformen, Beispiel: Bandpaß mit zwei Wandlern“, AES Meeting, Heilbronn Feb. 1997; zu finden auch bei [www.akabak.de](http://www.akabak.de)

Eine eindeutige Antwort erhält man nur bei Wiederholung der Messung unter Ausschluss der Fehlerursachen, die zu so einer Verschiebung führen können. Bei einer solchen Messung wären folgende Dinge durchzuführen bzw. besonders zu beachten:

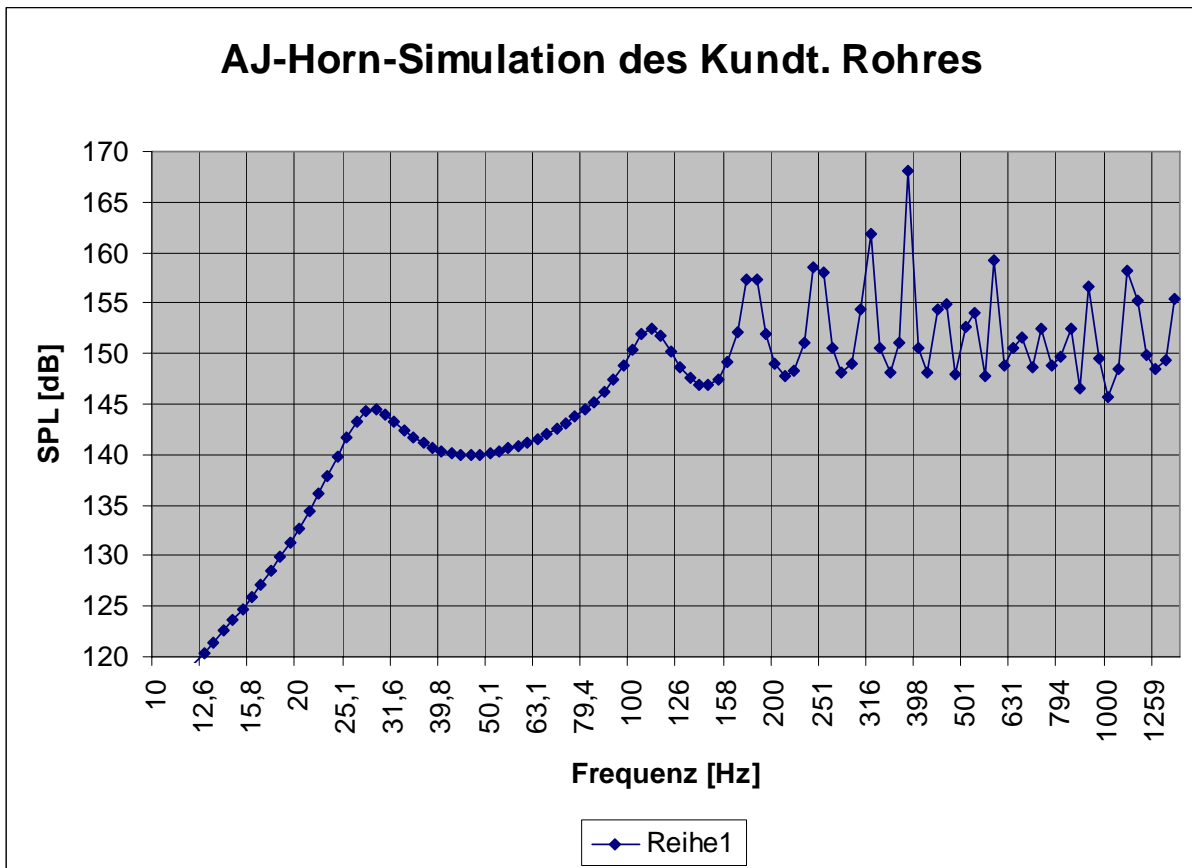
1. Es ist eine (z.B. MLS- oder TDS-) Messung des Frequenzganges bei geschlossenem Rohr durchführen. Dabei ist besonders auf Dichtheit an allen Stellen und niederohmige Ansteuerung des Lautsprechers zu achten. Entsprechen die dabei gemessenen Resonanzfrequenzen den berechneten für ein beidseitig geschlossenes Rohr, ist zu prüfen, ob die Daten der vom B&K-Analyzer exportierten \*.ADA-files den angezeigten Messdaten entsprechen, oder beim Export eine Verschiebung auftritt.
2. Ist bei der ersten Messung eine Verschiebung der Resonanzfrequenzen zu erkennen, wie bei der Messreihe aus dieser Arbeit, sollte die Frequenz der untersten Resonanz des Rohres bestimmt werden. Dazu könnte man durch händisches Durchstimmen des Generators das erste Resonanzmaximum herausfinden. Für das 2.4 Meter lange Rohr müsste sich dieses zwischen 30 und 80 Hz befinden.
3. Eventuell bringt auch eine Messung mit offenem Rohr noch Erkenntnisse.

Auch die Ursache des starken Abfalls in den gemessenen Frequenzgängen könnte man bei erneuter Messung genauer untersuchen:

1. Es sollte einerseits eine Frequenzgangmessung mit Messmikrofon über das Sondenrohr stattfinden (wie bei der Messung des Stehwellenverhältnisses) und
2. eine Vergleichsmessung, bei der das Messmikrofon direkt am Ende des Rohres befestigt ist (durch ein geeignetes Endstück, das ein abgedichtetes Loch geeigneter Größe enthält).

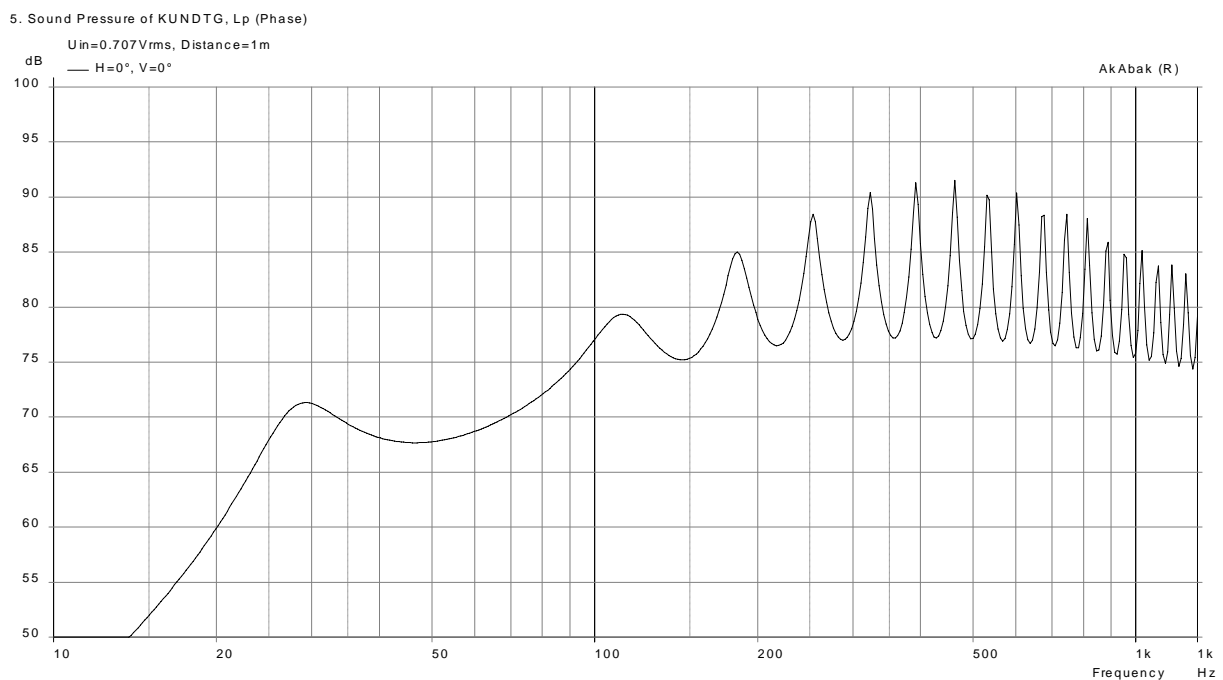
Dadurch könnte der genaue Einfluss der Dämpfung des Sondenrohres bestimmt werden.

Um vorab schon ein Simulationsergebnis zum Vergleich der zukünftigen Messdaten zu haben, hat Herr Prof. Graber mit der Software AJ-Horn eine Simulation der Schallabstrahlung von Lautsprecher und offenem Rohr angestellt. Die Software ist dafür bekannt, für Hornlautsprecher Simulationsergebnisse zu liefern, die sich exzellent mit den Messungen decken. Die Simulationsergebnisse wurden zur besseren Darstellung in Excel exportiert:



**Abbildung 30 - AJ-Horn-Simulation der Schallabstrahlung vom Lautsprecher am offenen Rohr**

Eine von mir angestellte Simulation in AkAbak auf Basis der gleichen Parameter zeigt nahezu denselben Verlauf, nur mit einer deutlich besseren Auflösung. Dadurch sind auch die Resonanzen oberhalb von ca. 400 Hz deutlich erkennbar.



**Abbildung 31 - AkAbak-Simulation der Schallabstrahlung vom Lautsprecher am offenen Rohr**

ENDE

# **5 Anhang**

## **5.1 Literatur**

[Cremer]

Lothar Cremer und Helmut Müller  
„Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik“  
Band II, Wellentheoretische Raumakustik  
S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1976, S.47

## **5.2 Quellcodes**